Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2016, Segunda Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.

Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

(a) Matriz escalonada

(b) Menor adjunto.

(c) Coordenadas.

(d) Aplicación lineal

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n. Demuestre que un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V si y sólo si todo vector de V se puede expresar de forma única como combinación lineal de dichos vectores.

Ejercicio 2: (3.5 puntos) En el espacio vectorial $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ de matrices cuadradas de orden 2 con elementos en $\mathbb{K}$ se consideran los subconjuntos:

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \; a - b = 0\} \;\text{ y }\; T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \; a - b + c = 0, \; c - d = 0\}$$

(a) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

(b) Determine una base y unas ecuaciones implícitas de $S + T$ y $S \cap T$; y justifique si se cumple que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = S \oplus T$.

Ejercicio 3: (2.5 puntos) Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V.

(a) Determine las matrices, respecto de $\mathcal{B}$, de las aplicaciones lineales $f : V \to V$ que cumplen las condiciones:

(i) $f(e_1 + e_2) = e_2 + 2e_3$

(ii) El núcleo contiene a la recta $R \equiv \{x + y = 0, \; z = 0\}$

(iii) Transforman la recta $R_1 \equiv \{x = 0, y = 0\}$ en la recta $R_2 \equiv \{x+y = 0, x+z = 0\}$.

(b) ¿En qué casos se tiene la igualdad $\operatorname{Ker} f = R$? Calcule unas ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$ en los casos $\operatorname{Ker} f \neq R$