JORGE MORRA

Tema 3. Técnicas de Recuento. Combinatoria

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 3. Técnicas de Recuento. Combinatoria

OPOSICIONES
MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el tercer cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de técnicas de recuento y combinatoria.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que dominemos del tema.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* en el tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este tercer cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, septiembre de 2019

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Personalmente reconozco que es uno de mis preferidos. Los profesores de Matemáticas no impartimos Combinatoria de forma habitual porque se eliminó del temario de ESO, y porque aunque la probabilidad está incluida en 2º Bachillerato, es cierto que en muchos casos no llegamos a ella por falta de tiempo; o la damos pero no en la profundidad que debiéramos.

Este hecho, en esencia de poca importancia, no lo es tanto. Cuando expones tu tema al tribunal, es importante que éste encuentre conceptos y resultados que sean *"nuevos"* para ellos; y en este tema se encuentran problemas en principio elementales que de elementales no tienen nada. Descubrirá el lector que el contenido no es tan trivial como podría entreverse y que algunos de los problemas planteados son realmente complicados.

Sin extenderme más diría en primer lugar que es tremendamente importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Parece algo incuestionable, pero sé que a veces tendemos a saltarnos partes de un texto porque lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, el lector ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y se estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Pues bien, comencemos:

- La **"Introducción"** es muy importante, es la que da concreción al tema y debe ser al completo. Es necesario justificar lo que expondrá a continuación.
- De la sección **"Técnicas de recuento"** es importante enunciar ambos principios, el de adición y el del produto, aunque las demostraciones pueden omitirse.
- De la sección **"Muestras y ordenaciones"** debe explicarse el concepto de *muestra* que vamos a utilizar, y desarrollar las distintas posibilidades que tenemos al seleccionar una de ellas. Las definiciones de *permutaciones* y *combinaciones* tanto sin repetición como con repetición deben incluirse. Obviamente también las fórmulas que se obtienen para cada una de ellas y los ejemplos que se incluyen. El concepto de *permutaciones con repetición* que se encuentra en numerosos textos se ha incluido dentro de las *combinaciones con repetición.*
- De la sección **"Aplicaciones de la Combinatoria, distribuciones y llenados**; deben desarrollarse las cuatro posibilidades.

Bolas y celdas distinguibles: Debe explicarse e introducir los ejemplos que hay en el tema. Después se debe hacer distinción en cuanto al número de bolas y en cuanto al tipo de bolas y desarrollar la fórmulas correspondientes.

Bolas no distinguibles y celdas distinguibles: Se introduce explicando las posibilidades. También se desarrollan las fórmulas.

Bolas distinguibles y celdas no distinguibles: Se enuncian y demuestran la proposiciones 5.1 y 5.3. Los corolarios solo se enuncian.

Bolas y celdas no distinguibles: Se desarrolla al completo.

Si con esta síntesis del tema llena las dos horas de examen perfecto, en caso contrario lo dicho anteriormente, se deja a su criterio aumentar o disminuir contenidos.

Por último, cuando el lector lo haya trabajado y estudiado sería aconsejable la selección de una variedad de problemas de oposición relacionados con la combinatoria y resolverlos. Es la mejor forma de afianzar conceptos y procedimientos.

2. Introducción

La Combinatoria es una de las nuevas ramas de la Matemática que se encarga de estudiar los distintos agrupamientos que pueden realizarse con los elementos de un conjunto si tener en cuenta el tipo, forma, color, etc, de los mismos.

Los comienzos de la Combinatoria datan del siglo XVII con los primeros estudios sobre probabilidades de Fermat y Pascal. Éste último es el primero en darse cuenta la relación que existe entre los números combinatorios y la fórmula del desarrollo de un binomio. Recordemos a este respecto que los elementos con los que se construye su famoso triángulo, no son más que una serie de números combinatorios.

Por otra parte en ”Disertatio de Arte Combinatoria” de 1666, Leibnitz (1646-1716) introduce los primeros conceptos sobre permutaciones y combinaciones, dando incluso algunas de las primeras fórmulas reconocidas con números combinatorios.

Pero el principal precursor de esta rama de la Matemática fue Jackes Bernouilli (1654-1705), quien en su obra *”Arte de la Conjetura”*, publicada a título póstumo, desarrolla toda una teoría general de permutaciones y combinaciones aplicadas principalmente a la teoría de juegos, pero que se extiende a otros muchos problemas de la época y posteriores. Es precisamente Bernouilli quien por primera vez introduce y demuestra el teorema binomial para exponentes enteros[1]:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Poco después fue Euler, quien en *”Departitione Numerotum”* realiza un estudio sobre las distintas formas en las que se puede escribir un natural[2] como suma de naturales, e incide de nuevo en toda la teoría combinatoria que había hasta el momento. Este problema, que

[1] Newton lo generalizó para todo tipo de exponentes.
[2] En este caso sin considerar al 0 Natural

se llamó poco después una partición del natural n, y cada uno de los sumandos una parte; lo plantearemos en secciones posteriores de este tema; concretamente cuando estudiemos las distribuciones y los llenados.

3. Técnicas de recuento

El objetivo de este punto es el de conocer las distintas formas que tenemos de contar los elementos de un conjunto. Desde Cantor el cardinal de un conjunto finito se define a partir de la biyección que dicho conjunto tiene con un subconjunto de los números naturales. Así, si $A = \{\square, \circledcirc, \triangle\}$ puede ponerse en biyección con el subconjunto $B = \{1, 2, 3\}$ de $\mathbb{N}$, y diríamos que A tiene 3 elementos. Lo denotaremos como $|A|$.

Sin embargo, el problema se complica cuando lo que tenemos que contar son los elementos de una serie de conjuntos con algunas características, o bien la unión de ellos, o su intersección.

Existen dos principios básicos a este respecto: el de Adición y el de Multiplicación.

Teorema 3.1 (Principio de Adición) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Demostración: Por inducción. Comencemos por $n = 2$. Sean A_1, A_2 con $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Si A_1 y A_2 tienen r y k elementos respectivamente: $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ y $A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, entonces

$$A_1 \cup A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$$

Obviamente $|A_1 \cup A_2| = r + k$, y con ello $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$.

Supongámoslo cierto para n, y comprobémoslo para $n + 1$.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ disjuntos dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, $i \neq j$.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}$$

luego

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right|$$

Pero $A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \varnothing$ y si aplicamos además la hipótesis de inducción, resulta

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + |A_{n+1}|$$

$\otimes$

Teorema 3.2 (Principio del Producto)

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

denotando por $\times$ como el producto cartesiano de los A_i.

Demostración: También por inducción. Comenzaremos por $n = 2$. Sean A_1, A_2 dos conjuntos finitos y no vacíos.

Siendo $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ y $A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$.

Por definición de producto cartesiano:

$$A_1 \times A_2 = \{(a, b) : a \in A_1, b \in A_2\}$$

O también en este caso

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_k), (a_2, b_1), \ldots, (a_2, b_k), \ldots, (a_r, b_1), \ldots, (a_r, b_k)\}$$

Es claro que para cada $i = 1, 2, \ldots, r$; tendremos $(a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots (a_i, b_k)$, k pares.

Como esto se puede hacer con cada uno de los elementos de A_1, obtendremos $r \cdot k$ pares distintos. Por tanto:

$$|A_1 \times A_2| = r \cdot k = |A_1| \cdot |A_2|$$

Supongámoslo cierto para n. Consideremos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ en las condiciones del teorema.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n+1} = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$$

y con ello, aplicando la hipótesis de inducción, obtenemos

$$|(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| = \left| \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right| \cdot |A_{n+1}| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| \cdot |A_{n+1}|$$

$\otimes$

Ambos principios, tanto el adición como el de multiplicación, son en esencia muy intuitivos. Además éste último se puede enunciar de una forma más sencilla y mucho más práctica:

”Supongamos que tenemos n urnas cada una con k_i bolas. Consideremos el experimento de extraer una bola de cada una de ellas, y colocarlas en el orden en el que se extraen. En este caso el Principio del Producto afirma que el número de posibilidades distintas que tenemos es $\prod_{i=1}^{n} k_i$.”

4. Muestras y ordenaciones

Comencemos con algunos conceptos elementales. Una muestra, estadísticamente hablando, es una operación propia de selección de elementos de un conjunto dado; sin embargo también podemos considerar una muestra como el subconjunto elegido. En todo el tema nosotros consideraremos la segunda acepción.

Supongamos que tenemos un conjunto A con n elementos, del cual extraemos una muestra de r elementos. Llamaremos a este subconjunto $r - muestra$:

$$(a_1, a_2, \ldots a_r), \text{ donde } a_i \in A_n; \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

El número r se llama *volumen* de la muestra, y dependiendo del experimento en cuestión, éste deberá ser menor, igual o mayor que el cardinal del conjunto.

Dependiendo del problema que estemos tratando, necesitamos que en la muestra consideremos el orden de selección o sucesión de los elementos (en este caso se llamarán $r - permutaciones$) o bien si lo que nos importa no es tanto el orden, sino el conjunto en cuestión ($r - combinaciones$).

En algunos textos se incluye un nuevo tipo que se denomina *variación*. En realidad el concepto de ”variación” y el de ”permutación” son esencialmente iguales. La diferencia estriba en el número de elementos de la muestra: si éste es menor que el cardinal del conjunto entonces lo denominan *variación*; y si es igual al cardinal de A entonces se le llama *permutación*.

Nosotros consideraremos que en esencia solo tenemos un tipo: $r - permutaciones$

Por ejemplo, dos $4 - muestras$ de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ podrían ser:

$$(a_1, a_3, a_4, a_6) \text{ y } (a_3, a_4, a_1, a_6)$$

que representarían dos $4-$*combinaciones* iguales y sin embargo dos $4-$*permutaciones* diferentes.

También es posible que en las muestras los elementos se repitan. En este caso nos encontramos con $r-$*combinaciones con repetición* en el caso de que no nos importe el orden en la selección; o con $r-$*permutaciones con repetición*, cuando sí importa el orden.

Nuevamente en algunos textos podemos encontrarnos el concepto de ”variación con repetición”, que nosotros encuadraremos dentro de ”permutación con repetición”.

Con el fin de que los conceptos se entiendan de la mejor forma posible, los ejemplificaremos utilizando habitualmente bolas y urnas o bolas y celdas.

4.1. Permutaciones

Como ya se ha dicho, una $r-$permutación es una muestra de r elementos de un $n-$conjunto, $n \geqslant r$, y tal que no nos importa el orden de selección.

A este respecto un ejemplo que ilustra con precisión el concepto es el de la urna que contiene n bolas numeradas del 1 al n; y de la cual se extraen r bolas.

Tendríamos dos posibilidades, la primera es considerar que después de anotar el resultado obtenido, no volvemos a incorporar la bola a la urna, y la segunda si. En el primer caso nos encontraremos con permutaciones *sin* repetición y en el segundo *con* repetición.

4.1.1. r−permutaciones sin repetición de un n−conjunto

Tenemos pues una urna con n bolas numeradas, y extraemos r de ellas, sin volver a introducirlas después. Las anotamos en el orden en el que las extraemos.

El número que queremos hallar lo denotaremos como $P_{n,r}$. La cuestión se resuelve utilizando el principio del producto antes enunciado. En efecto, en el $n-$conjunto se tienen n posibilidades de seleccionar el primer elemento, después $n - 1$ posibilidades de seleccionar el segundo, luego $n-2$ posibilidades con el tercero, y así sucesivamente. Para la elección el