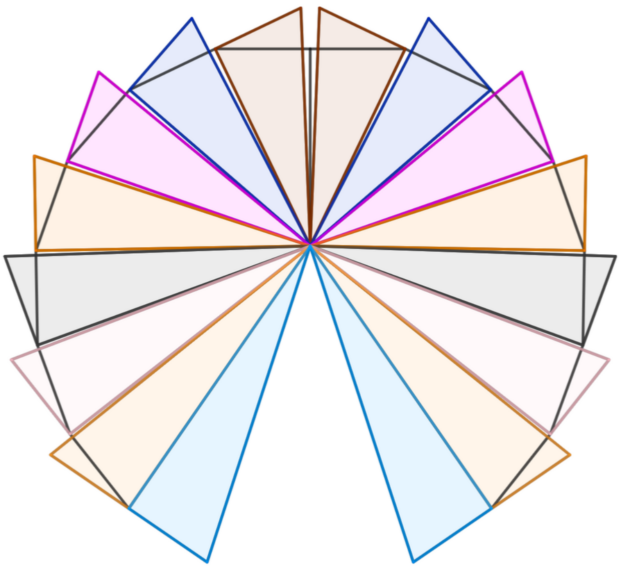
JORGE MORRA

Tema 5. Números Racionales

OPOSICIONES
MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 5. Números Racionales



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el quinto cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de los números racionales.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este quinto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, octubre de 2019

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Aquí se introducen por primera vez los números racionales. Su construcción se basa en el anillo de los enteros, y en el desarrollo del tema se exponen las propiedades más importantes tanto conjuntistas, como algebraicas como topológicas.

Es, como el de los números enteros, un tema muy amplio. El enunciado y demostración de todos los resultados que se exponen a lo largo de sus páginas podría duplicar perfectamente el número de ellas.

Es claro que nos encontramos ante un dilema: presentar y demostrar todo lo interesante, o bien presentar solamente, demostrar lo imprescindible y enunciar lo que se considere básico al menos para que el tema pueda desarrollarse decentemente.

El dilema no es fácil. Por una parte soy de los que creen que los resultados importantes hay que enunciarlos y demostrarlos; y por otra pienso que en el tiempo que tiene el lector de desarrollo en la oposición no tiene sentido perderlo en la prueba de algunos teoremas.

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y se estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Pues bien, comencemos:

- La Introducción es al completo. Es importante justificar lo que se va a exponer a continuación. Deben introducirse todos los conceptos que luego se van a desarrollar.
- La sección 3 debe desarrollarse al completo. En ella se define $\mathbb{Q}$ como un cuerpo de fracciones.
- En la parte de las propiedades algebraicas es importante definir tanto la suma como el producto, demostrando que ambas operaciones no dependen de los representantes elegidos. Las propiedades que dotan a $\mathbb{Q}$ de cuerpo no es necesario demostrarlas todas. Debe demostrarse que $\mathbb{Q}$ es un DFU (dominio de factorización única), además de definir el orden y comprobar que está bien definido, aunque no se demuestre que los racionales están totalmente ordenados.
- La inmersión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ solo debe enunciarse. Aunque sí demostrar que se resuelven las ecuaciones del tipo $ax + b$.

- La unicidad de $\mathbb{Q}$ debe enunciarse y demostrarse, al igual que la representación y la numerabilidad. Son características importantes que no deben omitirse.
- Sobre las propiedades topológicas es importante que se dote a $\mathbb{Q}$ de la topología del orden, que luego se desarrolle que dicha topología es metrizable, y que coincide con la inducida de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. La propiedad aquimediana debe enunciarse y demostrarse.

Si con esta síntesis del tema llena las dos horas de examen perfecto, en caso contrario lo dicho anteriormente, se deja a su criterio aumentar o disminuir contenidos.

2. Introducción

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, todo anillo de él es un *dominio de integridad*[1]. El problema que nos planteamos es si todo dominio de integridad se puede considerar como subanillo de un cuerpo. La respuesta es cierta. Dado un dominio de integridad A, podemos construir el cuerpo que lo contiene. A dicho cuerpo se le llama el *cuerpo de fracciones de un dominio de integridad*.

Pero además, cuando trabajamos con los números enteros, cuya estructura es precisamente la de *Dominio de Integridad*, nos encontramos con que la ecuación $ax = b$ no siempre tiene solución. Es trivial comprobar que solamente la tendrá si a es divisible entre b. Como esto no siempre es posible, nos encontramos con la necesidad de dar solución al problema en todos los casos, no solamente en aquellos en los que $b|a$.

El procedimiento que vamos a utilizar es estándar. Básicamente vamos a construir un cuerpo, cuya definición es el *Cuerpo de Fracciones de un Dominio de Integridad*.

Esta forma se utiliza para cualquier estructura que sea Dominio, y en nuestro caso el objetivo es construir el cuerpo minimal que contenga a $\mathbb{Z}$. En el siguiente punto del tema se definirá $\mathbb{Q}$ como un conjunto de cocientes del tipo $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Parece bastante obvio que todo cuerpo que contenga a los números enteros debe contener a los cocientes anteriores, por tanto debería contener a $\mathbb{Q}$. Pero además se puede demostrar que dos cuerpos de fracciones del mismo dominio son isomorfos, lo que inevitablemente nos llevará a la unicidad de $\mathbb{Q}$, y a que sea éste el cuerpo minimal que contenga a $\mathbb{Z}$.

3. El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$

Consideremos el conjunto de los enteros, y sea $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Sea también el producto cartesiano:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Definimos una relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

[1] Recordemos que un Dominio de Integridad es un Anillo Conmutativo Unitario sin Divisores de Cero.

Sin excesivas complicaciones podemos observar que es en realidad una relación de equivalencia:

- **Reflexiva:** En efecto, $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$.
- **Simétrica:** Si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ entonces es claro que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
- **Transitiva:** Si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ entonces $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

Las demostraciones son elementales y se dejan para el lector.

El hecho de tener una relación de equivalencia permite definir el conjunto de clases de dicha relación.

Así pues:

$$\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0}{\mathcal{R}} = \{\overline{(a,b)} : (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0\}$$

Por notación a un elemento de una clase $\overline{(a,b)}$ lo escribiremos como $\frac{a}{b}$, y le llamaremos fracción.

Hemos construido de esta forma el Cuerpo de Fracciones del Dominio de Integridad $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. A este cuerpo lo llamaremos conjunto de los **Números Racionales** y lo denotaremos como $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0}{\mathcal{R}}$$

Cada elemento de $\mathbb{Q}$ será, por tanto, un número racional, lo que implica que utilizaremos el nombre de fracción para denotar un elemento de una clase, y el de número racional al representante de dicha clase. Esperamos que esta forma de hacerlo no lleve a ninguna confusión puesto que en ocasiones utilizaremos indistintamente la notación de fracción para hablar de un elemento de una clase y de la clase en sí.

Este concepto es el mismo que utilizamos en Secundaria cuando hablamos de las fracciones equivalentes, es decir el de fracciones que pertenecen a la misma clase, lo que implican que representan el mismo número racional.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\mathcal{R}\left(\frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow ad = bc$$

Modificaremos la forma de denotar la relación de equivalencia a partir de este momento y escribiremos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\mathcal{R}\left(\frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$$

Al igual que con los enteros o los naturales necesitamos definir dos leyes de composición internas: la adición y el producto, para dotar a $\mathbb{Q}$ de la estructura de cuerpo.

Pero además a lo largo del tema y como ya hemos mencionado en líneas anteriores, denotaremos indistintamente una fracción como un representante de una clase como la clase en sí, esto es, escribiremos tanto $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ para decir que dos fracciones son equivalentes como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ para decir que los números racionales que representen son iguales.

4. Propiedades algebraicas de $\mathbb{Q}$

4.1. $(\mathbb{Q},+)$ es un grupo aditivo conmutativo

Comencemos definiendo la adición en $\mathbb{Q}$. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (\frac{a}{b},\frac{c}{d}) & \longmapsto & f(\frac{a}{b},\frac{c}{d}) = \frac{ad+bc}{bd} \end{array}$$

Lo primero que tenemos que comprobar es que la aplicación anterior se encuentra bien definida, o lo que es lo mismo, que no depende de los representantes elegidos. Para ello tomamos dos elementos distintos de la misma clase, es decir y utilizando el mismo término que en Secundaria, dos fracciones equivalentes.

Sean:

$$\frac{a}{b}\equiv\frac{a'}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}\equiv\frac{c'}{d'}$$

entonces $ab' = a'b$ y $cd' = c'd$.

Por una parte

$$f\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{bd}$$

y por otra

$$f\left(\frac{a'}{b'},\frac{c'}{d'}\right) = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

Podemos comprobar que ambas fracciones son también equivalentes, es decir pertenecen a la misma clase.

$$\begin{aligned}(ad+bc)\cdot b'd' =& adb'd' + bcb'd' = ab'dd' + cd'bb' = \\ =& a'bdd' + c'dbb' = bda'd' + bdc'd' = \\ =& bd\cdot(a'd'+c'd')\end{aligned}$$

Con lo que:

$$\frac{ab+bc}{bd}\equiv\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

De esta forma queda demostrado que no depende de los representantes elegidos. A esta aplicación la llamaremos adición y queda definida de la siguiente forma:

Definición 4.1 *Dadas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones de $\mathbb{Q}$ se define la suma o adición de números racionales como:*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Nótese que abusando de la notación podemos considerar cada fracción de dos formas distintas, por una parte como un representante de la clase del número racional que define, y por otra como la misma clase.

Para comprobar que $(\mathbb{Q},+)$ es un grupo aditivo conmutativo necesitamos algunas propiedades elementales. La primera es que la adición sea una ley de composición interna, que por definición es así. Las siguientes propiedades son: asociativa, existencia de elemento neutro, existencia de elemento opuesto, y si queremos que además sea conmutativo se exige la propiedad conmutativa.

Las demostraciones no son nada complicadas, sin embargo, si trabajamos con un elemento cualquiera de cada clase, entonces podemos encontrarnos con pruebas largas y algo tediosas. Para resolver este problema elegiremos un elemento concreto de una, y probaremos todas las propiedades con los elementos que creamos convenientes.

Los siguientes resultados se imparten frecuentemente en los primeros cursos de Secundaria.

Proposición 4.2 (Amplificación de fracciones) *Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, la fracción que obtenemos es equivalente a la primera, es decir pertenecen a la misma clase, y por tanto definen el mismo número racional.*

Demostración: Es trivial y se deja para el lector.

$\otimes$

Este procedimiento es muy simple y permite escribir fracciones con numeradores o denominadores con el signo que queramos. Se denomina amplificación puesto que de forma habitual escribimos otras fracciones equivalentes con un numerador y denominador cuyo valor absoluto es más grande.

Proposición 4.3 (Simplificación de fracciones) *Si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, la fracción que obtenemos es equivalente a la primera, es decir pertenecen a la misma clase, y por tanto definen el mismo número racional.*

Demostración: También es trivial y se deja para el lector.

$\otimes$

De forma lógica, no siempre es posible la simplificación de fracciones, basta escribir un representante cuyos numerador y denominador no tengan divisores primos comunes[2] para que nos demos cuenta que esta fracción no puede ser simplificada.

Definición 4.4 *Si una fracción no puede ser simplificada, se denomina irreducible.*

Podemos elegir, si queremos, la fracción irreducible de cada clase para representar nuestro número racional. Es trivial demostrar también que toda clase tiene un representante irreducible.

Proposición 4.5 (Reducción a común denominador) *Dadas $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Q}$ existen $\frac{a'_1}{b'_1}, \frac{a'_2}{b'_2}, \ldots, \frac{a'_n}{b'_n}$ tales que todas tienen el mismo denominador, es decir $b'_1 = b'_2 = \ldots = b'_n$ y además cada $\frac{a_i}{b_i} \equiv \frac{a'_i}{b'_i}$.*

Demostración: El procedimiento es archiconocido, se trata de *amplificar* las fracciones originales a otras cuyo denominador sea precisamente un múltiplo común de los denomi-

[2]En este caso se dicen primos entre sí.