PRIMERA PRUEBA, PARTE PRÁCTICA:

Problema 1.

Hallar el número de n-plas, $(a_1, a_2, ..., a_n)$, de componentes, a_i, números enteros positivos que satisfacen las tres ecuaciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 26 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 72 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 224$$

Problema 2.

Sea $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$ y $\forall x \in (0, 1)$ $f(x) > 0$.

Demostrar que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo $(0, 1)$ del eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de f.

Problema 3.

Si $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot x_n}{1 + x_n}}$, hallar $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$

Problema 4.

A) Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia y en ella dos puntos distintos, no diametralmente opuestos, A y B. Describir el lugar geométrico del ortocentro de los triángulos ABC, siendo C un punto de $\mathscr{C}$ distinto de A y B.

B) Se eligen aleatoriamente los números $b, c \in [0, a]$. La probabilidad de que la distancia en el plano complejo de las raíces del polinomio $z^2 + b \cdot z + c$ no sea mayor que 1, no es menor que 0,25. Hallar a.

Nota: *Cada uno de los cuatro problemas participará con el 25% en la calificación de este examen. Es fundamental que se describan por escrito las justificaciones del desarrollo de las soluciones, incluyendo los enunciados de los teoremas o proposiciones que se apliquen.*