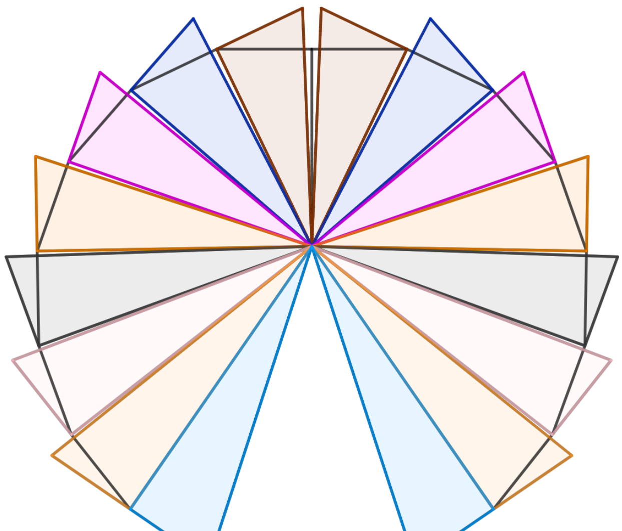
JORGE MORRA

# Tema 8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

# Tema 8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

# Prólogo

Tiene delante el lector el octavo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de las sucesiones recurrentes.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este octavo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, diciembre de 2019

# Índice

Página

# 1. ¿Cómo preparar este tema?

Como casi siempre, nos encontramos ante un dilema: presentar y demostrar todo lo interesante, o bien presentar solamente, demostrar lo imprescindible y enunciar lo que se considere básico al menos para que el tema pueda desarrollarse decentemente.

El dilema no es fácil. Por una parte soy de los que creen que los resultados importantes hay que enunciarlos y demostrarlos; y por otra pienso que en el tiempo que tiene el lector de desarrollo en la oposición no tiene sentido perderlo en la prueba de algunos teoremas.

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y se estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Antes de comenzar a estudiar y prepararse este tema, el lector tiene que considerar seriamente el enfoque que desea darle. Por una parte cabe pensar en centrarse en resultados puramente topológicos que trabajen principalmente los conceptos de límite, crecimiento, monotonía, acumulación, es decir resultados en los que se prima la convergencia de la sucesión y no tanto su formación; y por otro considerar a las sucesiones estudiando su término general o su recurrencia introduciendo teoremas y resultados relacionados con su función generatriz o su ecuación característica.

Nosotros vamos a seguir esta segunda opción y vamos a desarrollar los contenidos relacionados con las sucesiones recurrentes y sus aplicaciones. En cualquier caso hemos añadido, aunque sin demostración, un anexo con algunos resultados importantes sobre límites y convergencia.

Pues bien, comencemos:

- Es necesario introducir los conceptos de término general y forma recurrente de una sucesión, así como añadir los ejemplos de progresiones ariméticas y geométricas, y las sucesiones de las potencias de los naturales.
- Se debe enunciar y demostrar que la suma de los $n$ primeros elementos de una sucesión recurrente de orden $k$ es a su vez una sucesión recurrente de orden $k+1$.
- Se debe definir el concepto de función generatriz y el teorema en el que se construye dicha función.

- La sección *"forma explícita de una sucesión recurrente"* se debe incluir al completo.
- Debe definirse la ecuación característica de una sucesión recurrente, y enunciar el teorema que la caracteriza, aunque no se demuestre. El ejemplo sí puede incluirse. El caso de las raíces múltiples también debe enunciarse.
- En cuanto a las aplicaciones, es importante que se incluyan todas. Podemos, si lo creemos conveniente omitir algunos de los cálculos, pero sí dar los resultados.
- La última parte es del anexo. Es totalmente voluntario añadirla en el desarrollo del tema y siempre en la medida que se crea oportuna. En ella se encuentra el lector con una pequeña recopilación de algunos resultados topológicos sobre sucesiones, límites y operaciones.

Es cierto que el desarrollo que propongo es una forma alternativa de estudiar las sucesiones, pero me parecía la más interesante. Si con esta síntesis las dos horas se queden cortas se deja a su criterio disminuir contenidos.

## 2. Sucesiones

**Definición 2.1** *Una sucesión de números reales es una aplicación de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{R}$ *de la forma:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & 1 & \longmapsto & f(1)=a_1 \\ & 2 & \longmapsto & f(2)=a_2 \\ & 3 & \longmapsto & f(3)=a_3 \\ & \vdots & & \vdots \\ & n & \longmapsto & f(n)=a_n \end{array}$$

La imagen del 1 se llama *primer término* de la sucesión, la imagen del 2, *segundo término*,..., y en general la imagen de $n$, *término enésimo*, que es el término que ocupa el lugar $n$, o también *término general.* Se simboliza escribiendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Es habitual definir una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de una de las dos formas siguientes:

**De forma recurrente:** Es una regla que permite calcular cada término a partir de los anteriores.

Ejemplos:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}}$$

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

**De forma explícita:** Es una fórmula que permite hallar directamente cada término $a_n$, a partir del lugar que ocupa, es decir, a partir de $n$. En estos casos diremos que la sucesión está definida a partir de su término general.

Ejemplos:

$$a_n = n$$

$$a_n = n^2 - 2n + 4$$
$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$
$$a_n = 2^{n-1} - 1$$

Sin embargo, aunque las dos formas anteriores son las más habituales para definir una sucesión, lo cierto es que ésta puede venir dada por una regla que no parta de ninguna fórmula, ni tampoco de una forma recurrente. Por poner un ejemplo sencillo:

$$\begin{array}{rcll} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & 1 & \longmapsto & f(1) = a_1 = \text{primer decimal de la sucesión de decimales de } \pi \\ & 2 & \longmapsto & f(2) = a_2 = \text{segundo decimal de la sucesión de decimales de } \pi \\ & 3 & \longmapsto & f(3) = a_3 = \text{tercer decimal de la sucesión de decimales de } \pi \\ & \vdots & & \vdots \\ & n & \longmapsto & f(n) = a_n = \text{enésimo decimal de la sucesión de decimales de } \pi \end{array}$$

Es claro que de esta sucesión no conocemos más que un número finito de elementos, pero eso no quiere decir que tal sucesión no se encuentre bien definida, aunque no dependa de una fórmula concreta.

## 3. Sucesiones recurrentes: definición y ejemplos

El concepto de sucesión recurrente es en esencia el de una sucesión en el que es necesario conocer todos los términos anteriores a uno dado para conocer éste. Las progresiones aritméticas y geométricas son ejemplos claros de sucesiones recurrentes; sin embargo hay otras no tan evidentes como:

a) Las sucesiones de cuadrados o cubos de números naturales: $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$, ó $\{1, 8, 27, 64, \ldots\}$

b) Las sucesiones de las cifras de la descomposición decimal de los números racionales.

c) Las sucesiones de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir dos polinomios cualesquiera escrito en orden decreciente de las potencias de $x$. De hecho el desarrollo que se obtiene en el procedimiento anterior no es otro que la serie de Taylor de la función racional correspondiente.

Escribiremos a lo largo del tema las sucesiones en la forma $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

**Definición 3.1** *Una sucesión recurrente de orden $k$ será una $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n+k-i}$$

*donde $a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ y $n \geqslant 1$. A la ecuación anterior se la conoce como ecuación recurrente de orden $k$.*

Por lo tanto, lo que caracteriza la sucesión recurrente es que todo término suyo, desde uno determinado, se expresa según la fórmula anterior mediante una misma cantidad $k$ de términos anteriores.

Los siguientes ejemplos son los clásicos de sucesiones recurrentes.

## 3.1. Progresiones aritméticas y geométricas

**Progresiones geométricas:** Sea $a_1 = a$, $a_2 = a_1 r$, $a_3 = a_2 r$, y en general $a_{n+1} = a_n r$.

La sucesión anterior es una progresión geométrica de razón $r$, con $k = 1$ y $\alpha_1 = r$. Las progresiones geométricas son por consiguiente sucesiones recurrentes de primer orden.

**Progresiones aritméticas:** Sea $a_1 = a$, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, y en general:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

En principio esta relación puede no parecer una ecuación recurrente.

Si consideramos

$$a_{n+2} = a_{n+1} + d \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + d$$

entonces

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} + d) - (a_n + d) = a_{n+1} - a_n$$

y con ello

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

que sí es una sucesión recurrente con $k = 2$, $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = -1$. Más adelante veremos cómo calcular la suma de los $n$ términos de una progresión geométrica o aritmética.

## 3.2. Sucesión de las potencias de los naturales

**Sucesión de los cuadrados de los naturales:** Los primeros términos son $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, y en general $a_n = n^2$. A primera vista puede parecer que dicha sucesión tampoco es recurrente, sin embargo sí lo es.

Es claro que

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_n + 2n + 1$$

Y también

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2(n+1) + 1 = a_{n+1} + 2n + 3$$

Restando ambas expresiones:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} + 2n + 3) - (a_n + 2n + 1) = a_{n+1} - a_n + 2$$

y así

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$$

Nuevamente, para $n + 3$:

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2$$

Restamos otra vez

$$a_{n+3} - a_{n+2} = (2a_{n+2} - a_{n+1} + 2) - (2a_{n+1} - a_n + 2) = 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

O sea:

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

Hemos obtenido una ecuación recurrente de orden 3 con $k = 3$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -3$ y $\alpha_3 = 1$.

**Sucesión de los cubos de los naturales:** Viene dada por $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, y en general $a_n = n^3$. Se deja para el lector comprobar que efectivamente es una sucesión recurrente de orden 4.

**Sucesión de las potencias** $m-$*ésimas* **de los naturales:** De forma análoga se deja para el lector comprobar que son sucesiones recurrentes de orden $m+1$.

## 4. Suma de los *n* primeros términos de una sucesión recurrente

Uno de los problemas que nos solemos encontrar con cierta frecuencia suele ser el cálculo de la suma de los $n$ primeros términos de una progresión aritmética o geométrica, e incluso también la suma de los $n$ primeros cuadrados (o los cubos) de los naturales.

**Proposición 4.1** *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es recurrente de orden $k$, entonces la sucesión de las sumas es una sucesión recurrente de orden $k+1$.*

**Demostración:** En efecto, si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión recurrente cuya ecuación es

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n$$

entonces:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots\ &\quad \vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots a_n \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 \\ a_2 &= S_2 - a_1 = S_2 - S_1 \\ a_3 &= S_3 - a_1 - a_2 = S_3 - S_1 - (S_2 - S_1) = S_3 - S_2 \\ \ldots \end{aligned}$$

y en general

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$