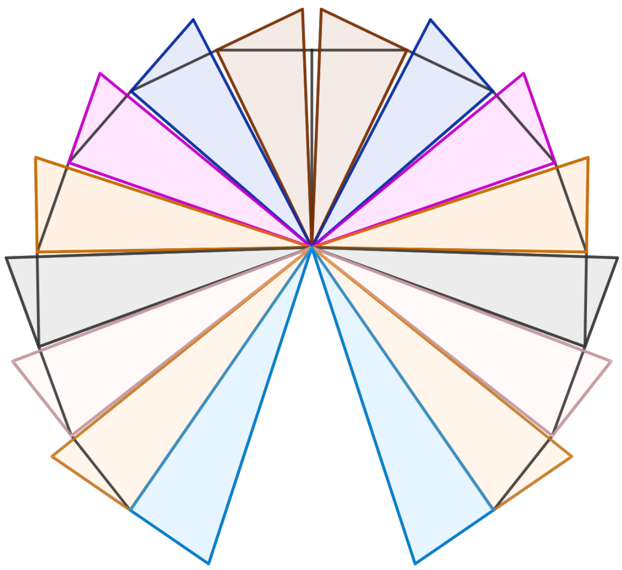
JORGE MORRA

Tema 9. Números Complejos. Aplicaciones geométricas.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 9. Números Complejos. Aplicaciones geométricas.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el noveno cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de las sucesiones recurrentes.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este noveno cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, enero de 2020

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como casi siempre, nos encontramos ante un dilema: presentar y demostrar todo lo interesante, o bien presentar solamente, demostrar lo imprescindible y enunciar lo que se considere básico al menos para que el tema pueda desarrollarse decentemente.

El dilema no es fácil. Por una parte soy de los que creen que los resultados importantes hay que enunciarlos y demostrarlos; y por otra pienso que en el tiempo que tiene el lector de desarrollo en la oposición no tiene sentido perderlo en la prueba de algunos teoremas.

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Pues bien, comencemos:

- La **"introducción"** es al complejo, justifica en cierta manera el porqué se empiezan a conocer los complejos a lo largo de la historia y enmarca el tema.
- La sección **"el número complejo"** debe incluirse también al completo, aunque no sea necesario demostrar la cantidad de resultados que tiene. Dentro de ella es importante desarrollar la representación gráfica, las definiciones de módulo, argumento y en general las interpretaciones de la suma, producto y cociente. Por último y no menos importante la fórmula de De Moivre y las raíces enésimas de la unidad.
- De la sección **"funciones complejas"** puede omitir, si el lector lo considera oportuno, la parte de las funciones holomorfas, las condiciones de Cauchy-Riemann, o también las funciones trigonométricas e hiperbólicas; aunque deben incluirse tanto la exponencial (en este caso elige el lector la forma que más le guste de las dos que se encuentran desarrolladas), como el logaritmo complejo.
- De la sección **"aplicaciones geométricas"** puede omitirse o solamente enunciar sin profundizar mucho, toda la parte de las aplicaciones conformes y las transformaciones de Möbius. Sí debe incluirse toda la parte de los movimientos y semejanzas.

El tema es muy extenso y se han omitido gran parte de las demostraciones. La mayoría son sencillas y dejan para el lector.

2. Introducción

El primero en utilizar a los números complejos o como se empezaron a llamar, imaginarios, fue el matemático Girolamo Cardano (1501-1576) al usarlos en la resolución de la fórmula de las ecuaciones cúbicas, publicada en 1545 en su *Ars Magna*. No todo fue oro ni todo se debió a Cardano. En tales ecuaciones, que podrían considerarse procedimientos en algunos casos, intervinieron tanto su alumno Ludovico Ferrari (1522-1565) como su adversario Niccolò Fontana (Tartaglia 1501-1557). En estos años, los descubrimientos de resoluciones de ecuaciones cúbicas y cuárticas estaban dirigidos más por los desafíos que había entre los matemáticos de la época que por el propio aprendizaje.

Lo cierto es que los números complejos o imaginarios, que fue como se empezaron a llamar a raíz de Descartes, no aparecieron porque sí, sino que lo hicieron como parte del proceso necesario para llegar a soluciones reales en algunas ecuaciones cúbicas.

La notación propia que ha llegado hasta nuestros días, es decir $i = \sqrt{-1}$ fue introducida por Euler que sin ser muy imaginativo lo hizo por ser la primera letra de la palabra *imaginario*. Después fue Gauss, cuando en 1799 publicó su tesis doctoral demostrando lo que después se llamó el *Teorema Fundamental del Álgebra*, el que los designo finalmente con el término *número complejo*. Además fue el propio Gauss el que en 1831 estableció la aritmética, notación y terminología propias de los complejos que ha llegado hasta nuestros días.

La justificación de su creación, como solemos encontrarnos en la mayoría de los textos, no está relacionada tanto con la historia, sino con la búsqueda de un conjunto que resuelva ecuaciones de segundo grado con discriminante[1] negativo. Con la introducción de los complejos se extienden los reales y se forma un nuevo cuerpo, éste sí, *algebraicamente* cerrado.

3. El número complejo

Definición 3.1 *Definiremos* $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. *Será el conjunto de pares ordenados reales en los que hemos definido dos leyes de composición internas.*

Concretamente:

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a+c, b+d) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

Se suele denotar a todo elemento de $\mathbb{C}$ con la letra z, así $z \in \mathbb{C}$. En consecuencia $z = (a, b)$; y en este caso se dice que a es la parte real de z y b la parte imaginaria, esto es, si $z = (a, b)$ escribiremos $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$

[1] Se define el discriminante de una ecuación general de 2º grado, $ax^2 + bx + c = 0$, como el número $b^2 - 4ac$.

3.1. $\mathbb{C}$ es cuerpo

Efectivamente, nuestro conjunto así definido verifica todas las propiedades de estructura de cuerpo; a saber:

- Con la operación " + ":
  - Asociativa: $(a,b)+((c,d)+(e,f))=((a,b)+(c,d))+(e,f)$.
  - Conmutativa:$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$.
  - Elemento neutro, $(0,0)\in\mathbb{C}$: $(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b)$.
  - Elemento opuesto: $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.
- Con la operación " $\cdot$ "
  - Asociativa: $(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))=((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)$.
  - Conmutativa: $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$.
  - Elemento neutro, $(1,0)\in\mathbb{C}$: $(a,b)\cdot(1,0)=(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$.
  - Elemento inverso (salvo para el elemento neutro para la suma, es decir, salvo para el cero).

y además la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

$$(a,b)\cdot((c,d)+(e,f))=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$$

La prueba de todas estas propiedades es sumamente sencilla por ser consecuencia directa de las propiedades de los números reales, y se deja para el lector.

Tenemos que hacer notar que cuando se introdujeron por primera vez los números complejos, se pensaba que eran una extensión de los reales en el sentido que contenía a éstos. Pero es de rigor hacer notar que si nos fijamos detenidamente en la definición, encontramos que los reales no son una parte de los complejos, porque cada complejo está formado por una pareja de reales. Sin embargo sí podemos asociar biunívocamente a éstos con un subcuerpo concreto de los complejos. Esta será nuestra forma de *extender* a los reales y de concebir $\mathbb{R}$ dentro de $\mathbb{C}$.

Fijémonos que:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$

$$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b,0)$$

con lo que el conjunto que denotaremos

$$\mathbb{R}^*=\{(a,0)\in\mathbb{C}:a\in\mathbb{R}\}$$

y las dos operaciones antes definidas, " + " y " $\cdot$ ", verifican que $(\mathbb{R}^*,+,\cdot)$ tiene estructura de cuerpo.

Con esta idea podemos *insertar* al conjunto de los números reales dentro de los complejos, ya que $\mathbb{R}^*$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Definiendo la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & a & \longmapsto & (a,0) \end{array}$$

puede el lector comprobar que es un isomorfismo de cuerpos. Podemos considerar en esencia que los números reales son en particular un subconjunto de los números complejos, que cumplen además las propiedades propias de un subcuerpo.

La siguiente proposición conjuga el cambio de notación y la inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

Proposición 3.2 *Denotando* $1 = (1,0)$*, e* $i = (0,1)$ *se puede demostrar que:*

a) $a = (a,0)$

b) $bi = (0,b)$

c) $i^2 = -1$

d) $a + bi = (a,b)$

Demostración: Se deja para el lector.

$\otimes$

A partir de este momento podemos denotar a los complejos de la siguiente forma:

$$a + bi = (a,b)$$

3.2. Representación geométrica

Identificamos de forma habitual cada número complejo con un elemento del plano pues en cierto modo cada $z \in \mathbb{C}$ no deja de ser un par ordenado de números reales. De hecho el plano recibe muchas veces el nombre de plano complejo. Se denomina *afijo* de un número complejo al punto que se le hace corresponder en el plano.

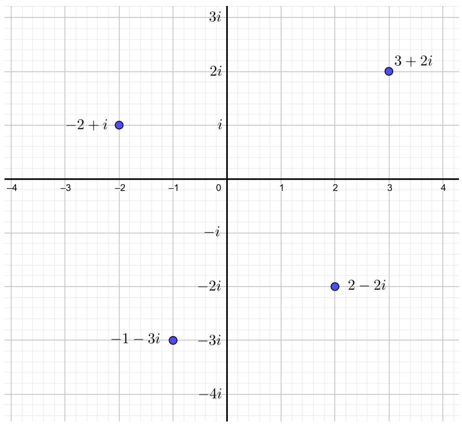


Figura 1: Representación de los números complejos

El eje horizontal recibe el nombre de *Eje Real*, y el eje vertical el de *Eje Imaginario*.

3.3. Conjugado y módulo. Propiedades

Definición 3.3 *Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces definimos:*

- *Conjugado de z: $\overline{z} = a - bi$.*
- *Módulo de z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Geométricamente el conjugado es la reflexión o simetría de z respecto al eje real y su módulo la distancia del punto (a, b) del plano al origen de coordenadas.

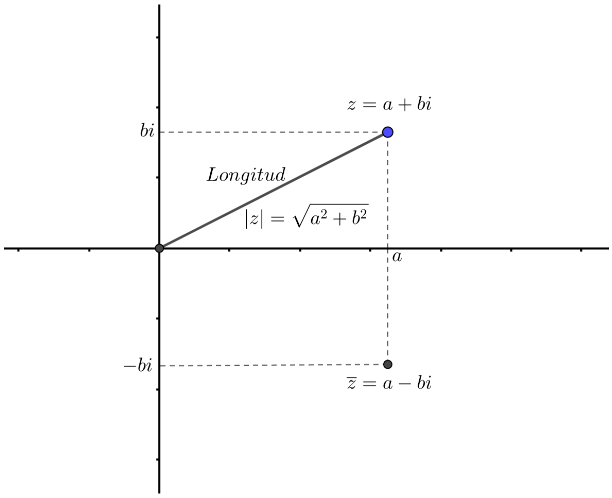


Figura 2: Representación módulo y conjugado de un número complejo

La distancia entre dos números complejos puede definirse como el módulo de su diferencia

$$d(z, w) = |z - w|$$

Las siguientes propiedades se dejan para el lector.

Proposición 3.4 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:*

a) $\overline{\overline{z}} = z$.

b) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z$ *es real (es decir, $z = a + 0i$).*

c) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

d) $\overline{-z} = -\overline{z}$.

e) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

f) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, *siempre que $z \neq 0$.*

g) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

h) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

i) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.