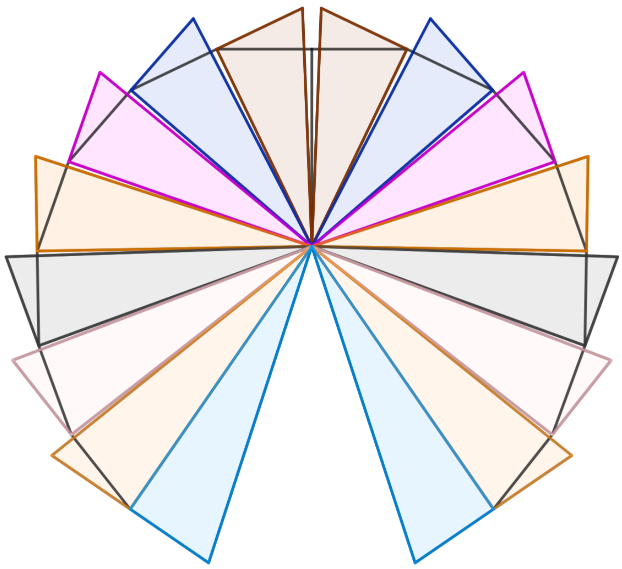
JORGE MORRA

# Tema 10. Sucesivas ampliaciones del concepto de número. Evolución histórica y problemas que resuelve cada una.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

# Tema 10. Sucesivas ampliaciones del concepto de número. Evolución histórica y problemas que resuelve cada una.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

# Prólogo

Tiene delante el lector el décimo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de las sucesivas ampliaciones del concepto de número y los problemas que resuelve cada una.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este décimo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, febrero de 2020

# Índice

# 1. ¿Cómo preparar este tema?

Este tema es eminentemente histórico, tiene poca o ninguna demostración, salvo aquellas que por consideración quiera hacer el lector e incluirlas en el desarrollo.

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Para desarrollar en toda su comprensión el tema es necesario que por una parte se delimite toda la parte histórica y por otra se justifique la razón de cada una de las ampliaciones de los números.

Este tema debe desarrollarse como la historia, en esencia como un cuento, interpretando y entendiendo todos los acontecimientos.

- La **Introducción** debe desarrollarse al completo pues justifica y ordena todos los contenidos que se van a incluir a continuación en el tema. Explique brevemente cómo sucedieron los hechos y enuncie finalmente el *Principio de permanencia*, esencial en toda ampliación de número.

- De los **números naturales**, es importante desarrollar el avance a lo largo de la historia y enumerar al menos los sistemas de numeración. Se debe justificar también su creación con los axiomas de Peano a partir de toda la fundamentación que sufre la matemática a finales del XIX.

- De los **números enteros** hablar de los inconvenientes encontrados con los números negativos a lo largo de los siglos. Su interpretación, y las operaciones que se efectuaban con ellos. La construcción debe añadirse también y si se estima oportuno alguna demostración sobre la estructura que poseen.

- De los **números racionales** debe exponerse el tratamiento que tenían de ellos los pueblos antiguos: babilonios, egipcios y griegos. También introducir el concepto del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad para justificar la creación de $\mathbb{Q}$. Las demostraciones relativas a su estructura pueden omitirse o añadirse, lo que el lector estime oportuno.

- De los **números reales** debe hablarse de los problemas con que se encontraron los griegos con su descubrimiento, aunque ya los conocieran pueblos más antiguos. El número real además debe considerarse como la primera forma que tenemos de *completar* el conjunto de las fracciones. Es importante añadir las distintas formas que hubo en la historia de introducir a los reales y la estructura que se alcanza.

- De los **números complejos** es importante hacer mención a toos los problemas que han tenido los matemáticos con las raíces de números negativos, su exclusión de gran parte de la matemática a lo largo de muchos años. Es importante hacer ver también que hasta que no se representaron geométricamente no se aceptaron en su totalidad. La construcción como un par ordenado de números reales en el que definimos dos operaciones internas debe incluirse y, si el lector quiere, también las demostraciones de algunas de sus propiedades.

- De los **números hipercomplejos** hacer distinción de los cuaterniones, como los primeros hipercomplejos, de la extensión de Grassmann, que genera espacios de este tipo en cualquier número de dimensiones, y de sus aplicaciones en general a la matemática y a la física.

Quiero hacer hincapié finalmente en que la base del desarrollo de este tema es la historia, que es la que justifica todas las definiciones, construcciones y demostraciones. Un buen desarrollo del mismo pasa por un buen desarrollo histórico, que justifique las construcciones que ha habido de los números, su comprensión, su introducción y su aplicación en las mismas matemáticas o en otras ciencias.

## 2. Introducción

El concepto de número es posiblemente el concepto más importante que podemos encontrarnos en todo el edificio de las matemáticas. Se forma a través de un prolongado desarrollo histórico, a partir de cuando el hombre es capaz de diferenciar una parte de varias, y concluye cuando las necesidades internas de la propia ciencia necesita de su concreción. El surgimiento y la formación de este concepto tuvieron lugar a la par del nacimiento y desarrollo de las matemáticas.

Al comienzo se trataba únicamente de la necesidad de poder contar y diferenciar objetos de forma abstracta. En muchas culturas la introducción de los primeros números no se hizo abstrayendo el concepto de lo que querían diferenciar sino que en la propia palabra o expresión se incluía lo que se contaba; así, *tres árboles* tenía una expresión distinta que *tres animales*; puesto que posiblemente hace miles de años para el hombre primitivo no era necesario saber contar para establecer si un cierto conjunto estaba completo.

Es de rigor afirmar que independientemente de los comienzos, la necesidad de contar objetos conjunto al surgimiento del concepto abstracto de número natural. Las primeras formas surgen básicamente por la necesidad de transmitir información acerca de la cantidad de elementos de un conjunto concreto; utilizando en algunos casos partes del cuerpo humano, palos, piedras, muescas, nudos en cuerdas, etc. A este respecto se han encontrado huesos en Europa con marcas que bien pudieran ser formas de registrar un calendario lunar. Sin embargo hasta que no se introduce la escritura no encontramos los primeros vestigios de los primeros sistemas de numeración que abstraían el concepto de número natural.

El paso siguiente de la abstracción es la forma de escribir el número, y para ello comienzan a surgir los primeros sistemas de numeración. El proceso de formación del que utilizamos en la actualidad ha sido el final de una serie muy entremezclada de sistemas de numeración diversos y con distintas posibilidades. En épocas muy cercanas en el tiempo podemos encontrarnos diferentes formas, dependiendo del pueblo que la utilizase, de denotar a los números y de las operaciones que podían hacer entre ellos.

A lo largo de la historia los pueblos han ido adoptando el concepto de número natural y han trabajado con él de distintas formas. La misma ciencia es la que a partir del siglo XV comienza a necesitar ampliar el concepto de natural a un nuevo conjunto, el de los enteros, al introducir dos nuevas ideas: el cero y los negativos. Posteriormente fueron necesarias nuevas ampliaciones por la necesidad de las propias matemáticas. Los enteros al resolver ecuaciones que en los números naturales no tenían solución; los racionales como cuerpo de fracciones del dominio de integridad de los enteros; los reales como único cuerpo ordenado, arquimediano y completo que incluye a los racionales; los complejos como extensión algebraica de los reales resolviendo aquellas ecuaciones con raíces negativas; y por último los cuaterniones como necesarios para interpretar y operar con magnitudes físicas que requirieran de varias coordenadas.

A comienzos del siglo XIX, como consecuencia de los grandes éxitos del cálculo diferencial, muchos matemáticos pensaron que era necesario argumentar las bases del análisis, es decir, la teoría de los límites. El número natural se concebía como un conjunto finito de unidades, el racional, como una razón de ciertas magnitudes, el real, como la longitud de un segmento en la recta y el complejo como un punto en el plano. Sí estaba claro que cada nuevo conjunto de números tenía que ser una extensión algebraica del anterior, lo que implicaba que las operaciones definidas tenían que conservarse de unos a otros.

Desde esta perspectiva se formuló el llamado *"principio de permanencia de las leyes formales del cálculo"*. Esta máxima indicaba que cada vez que construyera un nuevo sistema numérico, más amplio que el inicial, las operaciones debían generalizarse de modo que se conservaran las leyes de las operaciones que ya tenían los números.

Esta idea, junto con la opinión generalizada de que la construcción de las matemáticas debía pasar por el método axiomático basado en la teoría de conjuntos, indujo a los matemáticos de finales del XIX a definir nuevos sistemas numéricos utilizando la noción de *"extensión de un sistema algebraico"*. Para este proceso se entendía que los axiomas no eran más que las relaciones y operaciones algebraicas satisfechas por un conjunto en unas determinadas condiciones. Así por ejemplo se definen los naturales, o incluso los reales.

El principio de permanencia podría formularse de la siguiente forma:

**Definición 2.1 (Principio de permanencia)** *El sistema algebraico $A'$ se denomina* ***extensión del sistema algebraico*** *$A$ si el conjunto fundamental de $A$ es un subconjunto del conjunto fundamental de $A'$, siempre que exista una aplicación biyectiva del conjunto de las relaciones del sistema $A'$ en el conjunto de las relaciones del sistema $A$ y, si para cualquier juego de elementos del sistema $A$, en cuyo caso de cumple alguna relación de este sistema, se verifica la correspondiente relación del sistema $A'$.*

En esencia este principio viene a decir que en toda ampliación del concepto de número deben conservarse las leyes formales (conmutativa, asociativa,...) de las operaciones aritméticas.

## 3. Los números naturales, $\mathbb{N}$.

El proceso de formación de los sistemas de numeración en los distintos pueblos pasó previamente por contar por grupos: pares, decenas, docenas, etc., surgiendo poco después el comienzo de las primeras operaciones aritméticas. Fue tiempo después cuando se empezaron a conocer los primeros sistemas de numeración. El paso de la vida nómada a los asentamientos permanentes dio paso a la creación de las primeras ciudades. Babilonia, antigua ciudad de la Baja Mesopotamia y capital del Imperio Babilónico y del Imperio Neobabilónico fue una de las más importantes de la época. Los babilonios empleaban un sistema de numeración sexagesimal con un principio posicional de escritura. Utilizaban dos tipos diferentes de cuña para representar los números: una cuña delgada y vertical para el 1, y otra gruesa y horizontal para el 10. Para la representación de otros números se utilizaban estas cuñas en grupos, desde el 2 hasta el 9; o desde el 20 al 50. Curiosamente esta forma se detenía en el 59, ya que el 60 se representaba de nuevo con la cuña delgada pero en una posición distinta.

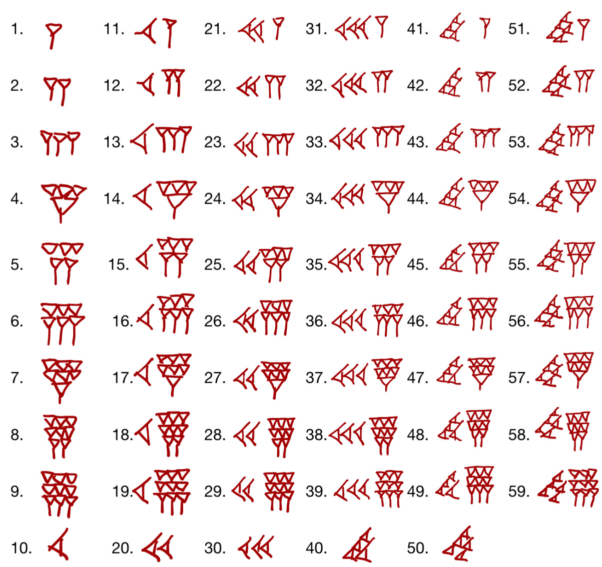



Figura 1: Sistema de numeración babilonio.

En este sentido podemos ver que tiene cierta concordancia con nuestro sistema decimal, formado por diez dígitos o cifras, y obteniendo valores distintos dependiendo de la situación de las cifras en el número.

Dos milenios después en el antiguo Egipto, se conocían varios de estos sistemas. En uno de ellos había signos especiales para denotar 1, 10, 100 y 1000; los demás se representaban por medio de combinaciones de estos signos. Para los egipcios la operación aritmética principal era la suma.

Los griegos empleaban el sistema alfabético de numeración; éste también era empleado por los eslavos. En la India, a comienzos de la era cristiana estaba extensamente difundido el sistema de numeración decimal verbal posicional con varios sinónimos para el cero. Posteriormente allí también aparecieron el sistema de numeración decimal posicional. A partir del siglo VIII de nuestra era este sistema comenzó a difundirse por el Oriente Arábico. Los europeos lo conocieron en el siglo XII.

La ampliación del conjunto que objetos que se contaban, requerida por el incremento de las actividades del hombre dio paso a la necesidad de extender el conjunto de los números. Se entra de lleno en la noción de infinitud de los números naturales. Un ejemplo a este respecto es el teorema de Euclides de los números primos, en el que afirma que el número de éstos es infinito.

A lo largo de la historia se fue incrementando el conjunto de números con los que se trabajaba, añadiendo a este respecto las fracciones, e incluso el cero o los negativos en algunas civilizaciones; sin embargo la construcción de los naturales como la conocemos hoy día no fue hasta finales del XIX y principios del XX.

La necesidad de una construcción axiomática de los conceptos con los que se trabajaba obligaba a un método de construcción sobre la base de la teoría de conjuntos. De acuerdo con este método toda teoría matemática estudia determinado sistema algebraico. En otras palabras se estudia un conjunto con relaciones seleccionadas en él, en particular, con operaciones algebraicas que satisfagan determinadas condiciones, es decir, los axiomas.

Como resultado de las investigaciones de Peano (1858-1932), Weierstrass (1815-1897) y Grassmann (1809-1877) fue construida la teoría axiomática de los números naturales.

G. Peano, en 1889, introdujo los naturales por medio de cinco postulados:

**Definición 3.1** *Diremos que $\mathcal{N}$ es un conjunto de Peano si cumple los siguientes axiomas:*

**Axioma 1:** *Existe un primer elemento de $\mathcal{N}$, que denotaremos como* $1$.

**Axioma 2:** *Dado cualquier elemento $a \in \mathcal{N}$ existe otro elemento que llamaremos su siguiente, $S(a)$, de tal forma que dos elementos distintos tienen siguientes distintos.*

**Axioma 3:** *No es posible que el siguiente de ningún elemento de $\mathcal{N}$ sea el* $1$.

**Axioma 4 :** *Si dos elementos tienen el mismo siguiente entonces son iguales.*

**Axioma 5: Axioma de Inducción Matemática.** ***"Si un conjunto de números naturales contiene al 1 y tal que si contiene a uno de ellos también contiene a su siguiente, entonces coincide con $\mathcal{N}$."***

*Esto es,* $\forall K \subset \mathcal{N}$ *tal que*

- $1 \in K$
- $\forall a \in \mathcal{N}$ *se tiene* $S(a) \in K$

*entonces se cumple que* $K = \mathcal{N}$

La construcción no se limita a la definición anterior, a partir de aquí es necesaria la demostración de una serie de resultados que completen la creación de $\mathbb{N}$. Entre ellos la