

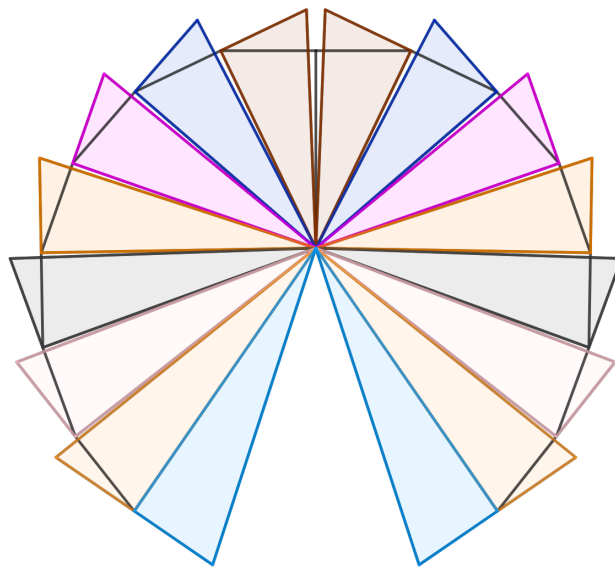
JORGE MORRA

Tema 11.  
Conceptos básicos de la  
teoría de conjuntos.  
Estructuras algebraicas.

OPOSICIONES  
MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 11.  
Conceptos básicos de la  
teoría de conjuntos.  
Estructuras algebraicas.



OPOSICIONES  
MATEMÁTICAS

## Prólogo

Tiene delante el lector el undécimo cuadernillo de la serie "Oposiciones Matemáticas", concretamente el de conceptos básicos de la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *"ese algo"* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *"entretenerlos"*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la "guinda" al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *"a conciencia"*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. "A conciencia" significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este undécimo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: [jorgemorra@outlook.es](mailto:jorgemorra@outlook.es). Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, marzo de 2020

**Índice**

	<b>Página</b>
<b>1. ¿Cómo preparar este tema?</b>	<b>6</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>3. Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel</b>	<b>8</b>
3.1. Términos primitivos. Relaciones primitivas. . . . .	9
3.2. Axiomas de ZF . . . . .	10
<b>4. Propiedades básicas de los conjuntos. Operaciones</b>	<b>14</b>
<b>5. Leyes de composición</b>	<b>18</b>
5.1. Concepto de operación . . . . .	19
5.2. Propiedades de una ley de composición interna . . . . .	19
5.3. Elementos notables . . . . .	20
5.4. Propiedades de una ley de composición externa . . . . .	20
<b>6. Estructuras algebraicas</b>	<b>21</b>
6.1. Con una ley de composición interna . . . . .	21
6.2. Con dos leyes de composición internas . . . . .	22
6.3. Con una ley de composición interna y otra de composición externa . . . . .	23
<b>7. Conclusiones</b>	<b>25</b>

## 1. ¿Cómo preparar este tema?

Este tema tiene una gran parte histórica y otra conceptual, pero sin tener grandes demostraciones. Toda la parte axiomática y formal necesaria para introducir los conceptos y las definiciones de estructuras algebraicas.

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Aunque el primer punto es concretamente: *nociones básicas de la teoría de conjuntos*, es posible que al lector le parezca que lo que yo considero básico está muy lejos de serlo. A este respecto la recomendación que le hago a continuación sobre lo que se debería preparar y estudiar tendría que modificarla; y hacer, en este caso, más hincapié a la parte de estructuras algebraicas que a la de la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

- La **introducción** debe desarrollarse al completo pues justifica y ordena todos los contenidos que se van a incluir a continuación en el tema. Introduzca y desarrolle el porqué de la necesidad de la formalizar la teoría de conjuntos con la aparición de las paradojas.
- De la **teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel** es importante la idea de lo que es un desarrollo axiomático, y su aplicación al de ZF. Se debe dar la relación de los nueve axiomas al completo, al igual que una breve descripción de lo que se consigue con cada uno de ellos. Es importante hacer especial hincapié al controvertido axioma de elección, AC, y su relación con importantes resultados que se obtienen a partir de él.
- De las **propiedades básicas de los conjuntos** es necesario introducir las definiciones pertinentes y sus propiedades. Las demostraciones son elementales y puede hacerlas el lector. Por último enunciar y demostrar que las partes de un conjunto tiene estructura de álgebra de Boole.
- De las **leyes de composición** que podemos definir en un conjunto dado, es necesario definir ambas, así como las propiedades.
- Una vez definidas las operaciones en un conjunto podemos considerar las distintas **estructuras algebraicas** que pueden poseer en función de dichas operaciones. Es

necesario definir y desarrollar todas, aunque algunos de los resultados no se demuestran. Estas últimas secciones son básicamente conceptuales, apenas hay resultados, como puede comprobar el lector, casi todo son definiciones.

## 2. Introducción

En el edificio de las Matemáticas un concepto es el básico y precursor de todos los restantes, el de conjunto. Cualquier rama, cualquier parte, cualquier concepto, cualquier teorema, cualquier definición se basa en la premisa de conocer correctamente el concepto de conjunto. Es más, sabemos que todos los resultados o proposiciones con los que podemos trabajar en Matemáticas pueden definirse formalmente a partir de los conjuntos. Esto es, por supuesto, inviable desde el punto de vista práctico pues la combinación de definiciones, axiomas y proposiciones más sencillas nos hacen llegar a teoremas demasiado complicados como para que podamos volver a los fundamentos de una manera inmediata.

George Cantor (1845-1918) definió en el siglo XIX un conjunto como "*cualquier colección, considerada como un todo, de objetos definidos y separados en nuestra intuición o en nuestro pensamiento*". Esta definición, aceptada originalmente por intuitiva por la comunidad matemática tuvo en el fondo cierta controversia, si bien es cierto también, que los resultados obtenidos por Cantor no fueron invalidados cuando se trabajó con una definición más formal de conjunto.

El hecho fue que, considerar un conjunto como una familia de elementos que verifiquen una propiedad concreta, que por la propia definición de Cantor, podríamos considerar válido, condujo a diferentes paradojas.

Partamos del conjunto de todos los conjuntos,  $X$ , que es intuitivamente aceptable, pues no parece complicado pensar en un conjunto que englobe todos los conjuntos. Pero aquí ya llegamos a una contradicción, pues el mismo Cantor ya había demostrado que la potencia de un conjunto, es decir, el conjunto de sus partes tenía un cardinal estrictamente mayor que el propio conjunto, luego

$$\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$$

Esto implicaba necesariamente que  $X \subsetneq \mathcal{P}(X)$  lo que nos lleva a contradicción puesto que  $X$  era originalmente el conjunto de todos los conjuntos.

La paradoja más conocida fue la de Bertrand Russell (1872-1970) en 1918, conocida como la *Paradoja del Barbero*. El planteamiento es muy sencillo: en un pueblo hay un barbero que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos; la pregunta que nos hacemos es: ¿quién afeita al barbero?.

Es cierto que puede parecer más un juego de palabras que proviene del mismo lenguaje, pero si ahondamos en la abstracción que percibimos detrás, llegamos a que en el fondo el problema se encuentra en la definición que tenemos de conjunto.

En primer lugar, la definición de Cantor adolecía de algo necesario en Matemáticas, es decir, de formalidad. Se creía que se podía considerar un conjunto como una familia de

elementos que cumpliera una condición previa.

$$C = \{x \in X : \mathcal{R}(x) \text{ es cierta} \}$$

Sin embargo Russell consideró un conjunto  $A$  con una relación peculiar, la de *no-pertenencia*:

$$A = \{x \in X : x \notin x\}$$

Aparentemente no se estaba incurriendo en ninguna contradicción puesto que no se había hecho otra cosa más que definir una condición sobre unos elementos  $x$  de otro conjunto  $X$ .

Ahora nos cuestionamos: ¿ $A$  es parte de  $A$ ? es decir, ¿ $A \in A$ ?

La respuesta queda lejos de ser trivial, y de hecho es una de las paradojas más conocidas de las matemáticas. Fijémonos:

- Si  $A \in A$  entonces  $A$  es de la forma  $A \in X$  con  $A \notin A$ .
- Y si  $A \notin A$  entonces  $A$  no es de la forma  $A \notin A$ , y con ello  $A \in A$ .

De ambas maneras llegamos a contradicción, efectivamente, ¿quién afeita al barbero? Podemos ver entonces que la noción de conjunto está sometida a ciertas restricciones que intuitivamente no son nada elementales.

Parece ser que Cantor no llegó a tener conocimiento de los resultados de Russell, pues hacia 1903 fue hospitalizado por cuarta vez por padecer una crisis de depresión maníaca. Estos episodios fueron ocurriendo con mayor frecuencia hasta su muerte en 1918 a la edad de 72 años.

En cualquier caso la paradoja del barbero llegó en un momento cumbre de la formalización de la teoría de Conjuntos. De hecho, cuando Frege (1848-1925) en 1903 estaba a punto de publicar su segundo volumen del libro "*Las leyes básicas de la aritmética*" en el que intentaba axiomatizar toda la teoría de conjuntos, recibió una carta de Russell, quien había recibido previamente de Frege un volumen suyo, en el que le decía:

*"Querido Frege, considere el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos."*

Frege intentó por todos los medios eludir la paradoja, sin embargo no pudo y el desastre fue, como cabía esperar, monumental. Esto supuso un impedimento serio y surgieron a raíz de ello nuevos intentos de resolver el problema. Entre ellas podemos destacar dos, la de Zermelo-Fraenkel (ZF) y la de von Neumann-Bernays-Godel (NBG).

### 3. Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel

Sin embargo, la necesidad de su axiomatización no provenía solamente como solución o respuesta a las paradojas que habían surgido, sino que se reconoció su importancia y se vio la necesidad de dotarla de un sistema de postulados lo suficientemente preciso como para poder manejarla convenientemente.



Zermelo fue el primero en abordar esta cuestión, creyendo con bastante razón que el principal problema había estado en la definición que Cantor había hecho de un conjunto. Creía que restringiendo su sistema de axiomas solamente a aquellas clases o conjuntos que Cantor denominaba consistentes<sup>1</sup>, éstos serían suficientes para la teoría.

La idea básica consistía en introducir conjuntos de los que no pudieran suscitar paradojas o incongruencias. Introdujo a este respecto el conjunto vacío, los naturales, la potencia de un conjunto siempre que el conjunto sea consistente.

Recordemos que un desarrollo axiomático de una rama de las Matemáticas se comienza por:

- a) Términos primitivos<sup>2</sup>.
- b) Relaciones primitivas.
- c) Propiedades (axiomas) que relacionan los términos primitivos y las relaciones primitivas.

Es a partir de aquí cuando se desarrollan todos los resultados y definiciones.

Concretamente en el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos tendremos:

- a) Elemento y conjunto son términos primitivos.
- b) Pertenencia de un elemento a un conjunto es una relación primitiva.
- c) Axiomas de la teoría de conjuntos.

El problema de Zermelo era el concepto de conjunto que había definido Cantor. Era obvio que adolecía de limitaciones, pero también era obvio que hasta ese momento no habían sido capaces de sustituirlo por otro. Zermelo consideró que surgiera a partir de los axiomas, y que no fuera precursor a éstos.

### 3.1. Términos primitivos. Relaciones primitivas.

El concepto de término o relación primitiva es el de no estar definida. En el sistema ZF no se parte de ninguna definición de conjunto, ni de pertenencia, es ésta una de las razones por las que es difícil encontrar incongruencias, puesto que un conjunto será aquel objeto que verifique los axiomas, y no otra cosa; y en los axiomas, como se ha visto a lo largo de la historia, no se han encontrado contradicciones.

Para ello introdujo las nociones primitivas: elemento<sup>3</sup>, conjunto y pertenencia. Las relaciones entre estos conceptos no definidos serán a partir del conjunto de los axiomas. La idea intuitiva que estaba detrás era que los "elementos" "pertenecían" a los "conjuntos", o que los conjuntos estaban formados por elementos. Sin embargo el concepto de qué es un conjunto o un elemento, o qué es pertenencia no estaba definido.

<sup>1</sup>Sin hacer una definición concreta de *multitudes consistentes* y *multitudes inconsistentes* diremos sin embargo que para Cantor las primeras son aquellas que pueden reunirse en una misma entidad sin generar contradicciones y las segundas no, por provocarlas.

<sup>2</sup>Un término primitivo es un término no definido dentro de una teoría axiomática que se concreta en los axiomas.

<sup>3</sup>Concretamente el término usado por Zermelo fue *urelemento*, que viene a significar elemento primordial.

Esto no es óbice sin embargo para que cuando hablemos de un elemento  $x$  de la teoría digamos que es un conjunto, y cuando escribamos  $x \in y$  estamos diciendo que el elemento  $x$  pertenece al conjunto  $y$ . Insistimos de nuevo en que los conceptos de elemento, conjunto y pertenencia no se encuentran definidos.

### 3.2. Axiomas de ZF

La lista de axiomas que presentamos a continuación fue elaborada por Ernst Zermelo (1871-1953) y Abraham Fraenkel (1891-1965), con algunos apuntes finales de Abraham Skolem (1887-1963), denotada habitualmente por ZF, si bien es cierto que existen otras teorías de conjuntos elaboradas con otros sistemas axiomáticos, como por ejemplo la de NBG en la que intervinieron John Von Neuman (1903-1957), Paul Bernays (1888-1957) y Kurt Gödel (1906-1978).

El sistema ZF tiene la particularidad de ser infinito, es decir, está compuesto por ¡infinitos axiomas!, aunque en la lista que presentamos aparecen únicamente nueve, hemos de hacer notar que el sexto, el axioma de reemplazamiento, no es un axioma en sí, sino una colección infinita de ellos.

Veremos que la mayoría de los problemas de la teoría de conjuntos surgen al considerar la noción de conjunto infinito, pero ¿cómo concluir que existen conjuntos infinitos? Este paso, tan claro desde el punto de vista intuitivo, también era preciso introducirlo entre los axiomas de ZF, insertado como el quinto y llamado "*axioma del infinito*".

ZF consta de 9 axiomas, que desarrollamos a continuación:

#### 1. Axioma de extensionalidad:

$$\forall x, y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y$$

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

#### 2. Axioma del conjunto vacío:

$$\exists x \forall y (\neg y \in x)$$

Existe un conjunto que no tiene ningún miembro, se suele denotar como  $\emptyset$ .

#### 3. Axioma de los pares no ordenados:

$$\forall x, y \exists z \forall w (x \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

Si  $x$  e  $y$  son conjuntos, entonces el par (no ordenado)  $\{x, y\}$  es un conjunto.

A partir de este axioma y del de extensionalidad se pueden demostrar las siguientes proposiciones:

**Proposición 3.1** *Para todo  $u, x$  se tiene que  $u \in \{x\}$  si y solo si  $u = x$ .*

Este resultado introduce implícitamente el concepto de "*átomo*"<sup>4</sup>. La idea que se esconde detrás es que todos los conjuntos son a su vez elementos pero no todos los elementos son conjuntos.

---

<sup>4</sup>En esencia un átomo se concibe como un elemento que no puede contener elementos, es decir un átomo es un elemento que no es un conjunto.