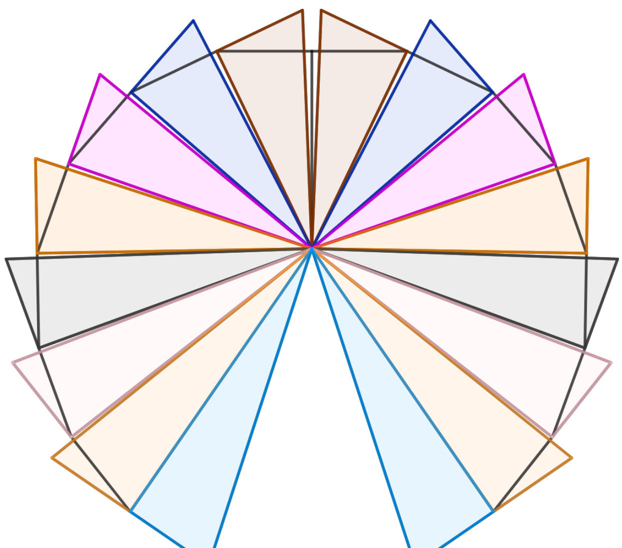
JORGE MORRA

Tema 12. Espacios vectoriales. Variedades lineales. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Teorema de isomorfía.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 12. Espacios vectoriales. Variedades lineales. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Teorema de isomorfía



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el duodécimo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de espacios vectoriales, variedades lineales, aplicaciones entre espacios vectoriales y teoremas de isomorfía.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este duodécimo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, abril de 2020

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema? 6

2. Introducción 7

3. Espacios vectoriales 8

4. Subespacios vectoriales 10

5. Combinaciones lineales. Dependencia lineal. Bases 10
- 5.1. Combinaciones lineales 10
- 5.2. Dependencia lineal 12
- 5.3. Bases 13

6. Variedades lineales 17

7. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Homomorfismos. 20
- 7.1. Definición de homomorfismo 20
- 7.2. Tipos de homomorfismos 21
- 7.3. Núcleo e imagen de un homomorfismo 22

8. Teoremas de Isomorfía 24

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado bastantes sin demostrar. Es aconsejable que los restantes se intenten, en algunas ocasiones se dan indicaciones y en otras no, pero independientemente de ello las demostraciones deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La sección *introducción* debe añadirse al completo. Es importante conocer la idea que se encuentra detrás de los espacios vectoriales, las aplicaciones lineales y los teoremas de isomorfía.

- De la sección *espacios vectoriales* también debe añadirse al completo, en ella se define el concepto de espacio vectorial, y algunas de sus propiedades.

- De la sección *subespacios vectoriales* debe introducirse el concepto de subespacio vectorial y el teorema de caracterización de éstos.

- De la sección *combinaciones lineales, dependencia lineal* y *bases* deben definirse tales conceptos, así como el de sistema generador. No es necesaria la demostración del teorema 5.2, sino solo su enunciado, así como todos los resultados que se encuentran en esta sección, salvo el primer teorema de la base que debe enunciarse y demostrarse.

- De la sección *variedades lineales* es importante su definición y la idea que subyace detrás del concepto de variedad, así como el procedimiento que permite dotar a estos subconjuntos de una estructura de espacio vectorial. No son necesarias todas las demostraciones de este método, aunque es recomendable desarrollar alguna de ellas. Es importante hacer mención de las distintas definiciones, todas equivalentes, de variedad lineal.

- De la sección *aplicaciones entre espacios vectoriales* debe darse su definición, así como los tipos de homomorfismos. También deben introducirse el núcleo y la imagen de un homomorfismo, así como todos los resultados (en este caso sin demostración), relacionados con ellos. Por último deben enunciarse los tres teoremas de isomorfía, aunque solamente se demuestre el primero de ellos.

2. Introducción

Los espacios vectoriales son estructuras algebraicas que surgen de la extensión del concepto de *grupo abeliano* al que se le ha añadido una ley de composición externa. La idea de esta operación es permitir que los elementos de un grupo puedan ser *modificados*, sin perder la esencia del elemento. El cambio o modificación que tiene lugar en el vector es solamente el de dotarle de lo que se denomina después su *módulo* o *norma*.

Aunque se concretará con las definiciones, la idea de subespacio vectorial es la de un espacio vectorial dentro de otro espacio vectorial, en el que, obviamente, se conservan las mismas leyes de composición. Cuando el subespacio se encuentra generado[1] por un único vector se llamará recta, si lo está por dos vectores linealmente independientes[2], se llamará plano, y en general se hablará de la dimensión del subespacio. Por ejemplo, cuando sea una recta, todos sus elementos serán el producto de su vector generador por un elemento del cuerpo. Podríamos escribirlo así[3]:

$$\mathcal{S} = \{\alpha \cdot u : u \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathbb{K}\}$$

Nótese la analogía del subgrupo, S generado por un único elemento a de un grupo, G:

$$S = \{0, a, -a\}$$

Es claro que el subgrupo está formado únicamente por tres elementos, y sin embargo $\mathcal{S}$ contiene infinitos vectores, pero podemos fijarnos mejor y descubrir que al aplicar sobre los elementos de este subgrupo una ley externa que *modifique* el *tamaño* del elemento del grupo, obtendremos los vectores de $\mathcal{S}$. Concluiríamos que $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial que proviene de aplicar una ley de composición externa "$\cdot$" sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ al subgrupo G.

Una de las dificultades que tiene este tema no es tanto la complejidad de las demostraciones, sino la diferencia en las definiciones que se van a desarrollar. En Matemáticas existen conceptos que son tratados por unos y otros autores de forma distinta[4]. En el caso de las variedades lineales, así ocurre. Por una parte podemos encontrarnos con textos que definen una variedad lineal como un subespacio vectorial sin más, en otros se identifica una variedad lineal con un subconjunto de un subespacio vectorial que no conserva la estructura en sí, pero que sí tiene la *forma* de un espacio vectorial, en otros como las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, e incluso encontramos autores que definen las variedades lineales como elementos de un espacio cociente.

[1] Veremos más adelante el concepto de sistema generador.

[2] También se definirá en secciones posteriores.

[3] Una definición más concreta se enunciará a lo largo del tema, en cualquier caso "$\cdot$" simboliza la ley de composición externa de un espacio vectorial.

[4] Por ejemplo, al trabajar con la axiomática de la teoría de conjuntos, algunos hablan de la teoría de Zermelo-Fraenkel, otros añaden a estos dos grandes matemáticos uno más, y dicen que la teoría es de Zermelo-Fraenkel-Skolem y podemos encontrarnos incluso una tercera familia que afirma que los axiomas de la teoría de conjuntos con los que se trabaja actualmente es la de Zermelo-Fraenkel-Neumann.

Nosotros vamos a decantarnos por la segunda opción, vamos a considerar que las variedades lineales son *como* subespacios vectoriales, sin llegar a serlo. En el fondo no es importante el cómo se definan, sino las propiedades y los resultados que podemos alcanzar con ellos.

Cuando se estudia un conjunto con una o varias leyes de composición, el siguiente paso natural es estudiar las aplicaciones que conservan dicha estructura. En el caso de los espacios vectoriales, éstas se denominan *aplicaciones lineales* u *homomorfismos*. Aunque se enunciará posteriormente, el conjunto de los endomorfismos de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ tiene a su vez estructura de álgebra sobre el mismo cuerpo sobre el que se define $\mathcal{V}$. Curiosamente es posible demostrar, aunque no será tratado en este tema, que existe un isomorfismo[5] entre la familia de los endomorfismos de $\mathcal{V}$ y la familia de las matrices $n \times n$, donde n es la dimensión[6] del espacio vectorial. Este isomorfismo nos lleva a afirmar que toda variedad lineal puede ser identificada como la imagen inversa de un vector por una aplicación lineal concreta. Dicha aplicación lineal está en correspondencia biunívoca con una matriz, y ésta con un sistema de ecuaciones lineales.

Por último queríamos hacer especial mención a los teoremas de isomorfía. Como ya hemos expuesto, algunos autores consideran solamente un teorema de isomorfía cuando se habla de espacios vectoriales, y otros consideran que hay tres. De hecho el nombre del tema hace mención a un único teorema. Nosotros, sin embargo, al haber considerado que en términos generales un espacio vectorial puede *verse* como la extensión de un grupo, vamos a introducir y demostrar los tres teoremas de isomorfía de grupos, aplicados en este caso, sobre espacios vectoriales.

3. Espacios vectoriales

Consideremos dos conjuntos, $\mathcal{V} \neq \emptyset$, y $\mathbb{K}$ cuerpo; y dos leyes de composición, una interna que denotaremos como ”+” y otra externa que escribiremos como ”·”.

Concretamente, la operación interna es:

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (u,v) & \longmapsto & +(u,v) = u+v \end{array}$$

y la externa:

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (\alpha,u) & \longmapsto & \cdot(\alpha,u) = \alpha \cdot u \end{array}$$

Definición 3.1 *Se dirá que* $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{K})$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *si:*

a) Para la ley interna

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (u,v) & \longmapsto & +(u,v) = u+v \end{array}$$

verifica que $(\mathcal{V}, +)$ *es un grupo abeliano,*

[5]Se definirá con posterioridad. Un isomorfismo es una aplicación biyectiva que conserva la estructura. En este caso la de álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

[6]La dimensión de un espacio vectorial también se definirá más adelante, y no es más que el número de elementos de una cualquiera de sus bases.

b) y para la ley

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (\alpha, u) & \longmapsto & \cdot(\alpha, u) = \alpha \cdot u \end{array}$$

cumple las siguientes cuatro propiedades,

I) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$

II) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$

III) $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

IV) *Si* 1 *es el elemento neutro en* $\mathbb{K}$ *entonces* $1 \cdot u = u$

A los elementos de $\mathcal{V}$ les llamaremos vectores, y a los de $\mathbb{K}$ escalares. A la operación interna "+" definida en $\mathcal{V}$ se le llama suma y a la externa "·" producto por escalares.

En todo el tema omitiremos "·" cuando escribamos el producto de un escalar por un vector; esto es, αu en vez de $\alpha \cdot u$. De la misma forma utilizaremos las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$... para denotar los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ y las letras u, v, w para denotar los vectores[7]. Por otra parte, abusaremos también de la notación al escribir de la misma forma el producto de elementos del cuerpo y la ley de composición externa, es decir, $\alpha\beta$ es el producto de dos elementos de $\mathbb{K}$ y αu el producto de un escalar por un vector. El contexto nos permitirá distinguir la operación con la que estemos trabajando. Análogamente denotaremos al vector 0 de $\mathcal{V}$ de la misma forma que el elemento neutro de la suma del cuerpo, 0. Por último escribiremos en la mayoría de los casos $(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ para denotar un espacio vectorial omitiendo nombrar las operaciones "+" y "·".

Podemos extraer las siguientes propiedades:

Propiedad 3.2 *Sea* $(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ *un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$*, entonces, para cada* $u, v, w \in \mathcal{V}$ *se tiene:*

a) En $\mathcal{V}$ *se verifica la propiedad de simplificación:*

$$u + v = u + w \Rightarrow v = w$$

b) $0 \cdot u = 0 \in \mathcal{V}$.

c) $\alpha \cdot 0 = 0 \in \mathcal{V}$.

d) Si $\alpha \cdot u = 0$ *entonces* $\alpha = 0$ *o bien* $u = 0$.

e) $(-\alpha) \cdot u = -(\alpha u)$.

f) Si $\alpha u = \beta u$*, con* $u \neq 0$*, entonces* $\alpha = \beta$.

g) Si $\alpha u = \alpha v$*, con* $\alpha \neq 0$*, entonces* $u = v$

Demostración: Se deja como ejercicio para el lector.

$\otimes$

[7]En algunos textos los vectores aparecen en la forma $\vec{u}$, con una flecha encima.

4. Subespacios vectoriales

Definición 4.1 *Dado un espacio vectorial,* $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{K})$*, se dice que* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ *es subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$ *si* $(\mathcal{S}, +, \cdot\mathbb{K})$ *tiene estructura de espacio vectorial*

En esencia un subespacio vectorial no es más que un espacio vectorial incluido en otro espacio vectorial. Se puede demostrar que $\mathcal{S} = \{0\}$ es subespacio vectorial. Además si $\mathcal{S} \neq \mathcal{V}$ y $\mathcal{S} \neq \{0\}\}$ entonces se dice que $\mathcal{S}$ es un *subespacio vectorial propio.*

Sin embargo al utilizar esta definición, la demostración de que un subconjunto de un espacio vectorial es a su vez un espacio vectorial podría resultar pesada. El siguiente resultado nos resuelve parcialmente este problema.

Teorema 4.2 (Teorema de caracterización de subespacios vectoriales) *La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto* $\mathcal{S} \neq \{0\}$ *de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$ *sea subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$ *es que:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in \mathcal{S} \text{ se tiene que } \alpha u + \beta v \in \mathcal{S}$$

Demostración: Comencemos con la condición necesaria. Supongamos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, entonces es claro que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in \mathcal{S}$ se tiene que $\alpha u + \beta v \in \mathcal{S}$.

Para la condición suficiente, sabemos que si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in S$ entonces $\alpha u + \beta v \in S$. Tomamos $\alpha = 1$ y $\beta = -1$ así dados $u, v \in S$ se cumple $u - v \in S$, lo que implica que $(\mathcal{S}, +)$ es grupo. Como también $u + v = v + u$ se tiene que es grupo abeliano.

La comprobación de que se cumplen las restantes propiedades con la operación externa son evidentes y se dejan para el lector.

$\otimes$

Definición 4.3 *Dados* $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{V}$ *subespacios vectoriales, se define*

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \{u \in \mathcal{V} : u = u_1 + u_2,\ \text{con } u_1 \in \mathcal{S}_1, u_2 \in \mathcal{S}_2\}$$

Puede demostrarse, aunque no lo vamos a hacer, que $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ tiene estructura de espacio vectorial, y por tanto es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$. Además cuando $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$ entonces se dice que la suma es directa, y se escribe:

$$\mathcal{S}_1 \bigoplus \mathcal{S}_2$$

5. Combinaciones lineales. Dependencia lineal. Bases

5.1. Combinaciones lineales

Definición 5.1 *Dado un subconjunto* $H \subset \mathcal{V}$*,* $H = \{(u_i)_{i \in I}\}$*, llamaremos combinación lineal de* H *a todo vector* $u \in \mathcal{V}$ *tal que:*

$$u = \sum_{j \in J} \alpha_j u_j$$

donde