JORGE MORRA

Tema 6. Números Reales. Topología de la Recta Real.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 6. Números Reales. Topología de la Recta Real

OPOSICIONES
MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el sexto cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de los números reales y la topología de la recta real.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este quinto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, noviembre de 2019

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Nos encontramos con un vasto tema, el de los números reales. Así dicho puede no parecer mucho, pero teniendo en cuenta que los reales son la base de la aritmética y de muchas ramas de las matemáticas, es prácticamente imposible sintetizar en poco más de veinte páginas los resultados y propiedades más importantes de este conjunto.

Como casi siempre, nos encontramos ante un dilema: presentar y demostrar todo lo interesante, o bien presentar solamente, demostrar lo imprescindible y enunciar lo que se considere básico al menos para que el tema pueda desarrollarse decentemente.

El dilema no es fácil. Por una parte soy de los que creen que los resultados importantes hay que enunciarlos y demostrarlos; y por otra pienso que en el tiempo que tiene el lector de desarrollo en la oposición no tiene sentido perderlo en la prueba de algunos teoremas.

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y se estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Pues bien, comencemos:

- La *Introducción* debe incluirse al completo. Es importante situar el problema de la aritmetización de los reales en su contexto histórico, así como las posibles soluciones que se aportaron con Cantor, Dedekind, Weierstrass o Hilbert.
- Obviamente se deben incluir los axiomas que definen $\mathbb{R}$, así como su representación geométrica e intervalos.
- Se deben clasificar también en enteros, racionales e irracionales, así como al menos introducir la diferenciación entre algebraicos y trascendentes, aunque no se demuestre el teorema de Cantor sobre la numerabilidad de los algebraicos.
- A partir de los axiomas debe demostrarse que es arquimediano.
- De la parte topológica es importante que se defina la topología habitual asociada a los reales, $\mathcal{T}_u$, que se defina el concepto de base, y se dé la base de la topología usual en $\mathbb{R}$. Es importante también enunciar que $\mathbb{R}$ es metrizable, y que la métrica es el valor absoluto. La base está dada por las bolas de centro un punto y radio un

número real. Deben introducirse los abiertos, los cerrados, las sucesiones y enunciar al menos los resultados sobre la caracterización de los cerrados por sucesiones.

- Es importante enunciar y demostrar la separabilidad de $\mathbb{R}$.
- El teorema de Heine-Borel-Lebesgue debe enunciarse y demostrarse.
- El teorema de la completitud de $\mathbb{R}$ debe al menos enunciarse, así como su unicidad.
- El teorema de Bolzano-Weierstrass debe enunciarse y demostrarse.

Es cierto que el desarrollo que propongo es muy ambicioso y es posible que con esta síntesis las dos horas se queden cortas, en este caso se deja a su criterio disminuir contenidos.

2. Introducción

Cuando se habla de los números y se utilizan sus propiedades, no se cae en la cuenta de que para la mayoría de individuos, el número 2, o el $2,5$ o el $\sqrt{2}$ para los más aventurados, no son más que la ejecución de un pensamiento, tan trivial, tan evidente que no se atreven a considerarlos como meramente un producto humano. Sin embargo, aunque la existencia pueda parecer garantizada cuando son imaginados, la comunidad matemática va aún más allá. Para el matemático es necesario concebirlos de alguna forma, o bien construyéndolos o bien con la introducción de un conjunto de axiomas.

La aritmetización de los números reales fue esencial en la posterior fundamentación del análisis. Téngase en cuenta que a lo largo de los siglos XVII y XVIII la Matemática avanzó principalmente en el cálculo sin tener una base consistente en la que afianzarse. Recordemos a este respecto algunos de los resultados de Euler o el mismo Gauss, en los que utilizaban expresiones de *límite, suma infinita, pequeño*, o *se acerca*, cuando querían hablar de conceptos que aunque identificaban con claridad, no eran capaces de formalizar matemáticamente.

El problema con el que se encontraban sistemáticamente los matemáticos de la época fue en esencia que desconocían la forma intrínseca de los números reales. Parecía lógico asignar a cada número un punto de la recta, pero no estaba nada claro si la recta funcionaba como todos suponían, es decir como un continuo, *sin poros*. Bolzano y Cauchy fueron precursores de la aritmetización de los números reales con la introducción de un concepto más formal de límite demostrando con ello el famoso teorema:

> *"Si f es una función real y continua sobre un intervalo cerrado tal que toma un valor negativo en uno de los extremos del intervalo y positivo en el otro entonces existe un valor en el interior tal que su imagen es cero".*

De hecho fue Bolzano el que introdujo la idea que luego formalizó Cauchy de que en las sucesiones convergentes los elementos tenían que distar tan poco como se quisiera a partir de un cierto momento. Además introdujo la idea, aceptada después, de que un conjunto acotado superiormente tenía que tener un valor que se considerara la menor de dichas cotas superiores.

El rigor y la fundamentación de lo que se exponía y demostraba en cuanto a los números reales no llegó hasta finales del siglo XIX. La idea que subyacía detrás de todo era la necesidad de *completar* el conjunto de los reales de alguna forma. Tanto Cantor, utilizando las sucesiones de Cauchy, como Dedekind con un nuevo concepto denominado *cortaduras*, lo hicieron utilizando a los racionales. Hilbert, sin embargo, lo hizo de forma axiomática, asignándoles un conjunto de propiedades que los convertía en el único cuerpo conmutativo, totalmente ordenado , arquimediano y completo.

Exponemos a continuación las formas más importantes de *construir* $\mathbb{R}$:

a) **Cortaduras de Dedekind:** Un número real es un conjunto α de números racionales, con las cuatro propiedades siguientes:

   a) Si x está en α e y es racional con $y < x$, entonces y está también en α.

   b) $\alpha \neq \varnothing$

   c) $\alpha \neq \mathbb{Q}$

   d) No existe ningún elemento máximo en α; dicho de otro modo, si x está en α, entonces existe algún y en α con $y > x$.

b) **Sucesiones de Cauchy:** Siendo $\{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy[1] de números racionales, diremos que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ sii $\{x_n - y_n\} \to 0$.

   Se define entonces:

$$\mathbb{R} = \frac{C(\mathbb{Q})}{\sim}$$

   siendo $C(\mathbb{Q})$ la familia de las sucesiones de Cauchy de los números racionales.

c) **Por decimales:** Se define un número real como un par $(a, \{b_n\})$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $\{b_n\}$ es una sucesión de números naturales del 0 al 9, con la condición de que la sucesión no es continuamente 9, es decir, que a partir de un elemento el 9 no se repite indefinidamente. Podemos representar:

$$(a, \{b_n\}) = a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 10^{-n}$$

En cualquiera de los tres casos se están construyendo los reales a partir de los racionales.

Veremos a lo largo del tema que $\mathbb{R}$ es el único cuerpo, salvo isomorfismo, que está completamente ordenado y es arquimediano, además de propiedades tan importantes como que es metrizable y posee la propiedad de la mínima cota superior[2].

[1] Aunque se definirá formalmente a lo largo del tema, una sucesión de Cauchy en un espacio métrico, $\{x_n\}$, es una sucesión tal que a partir de cierto elemento la distancia entre cualesquiera dos de ellos puede hacerse tan pequeña como queramos.

[2] La propiedad de la mínima cota superior es lo que se conoce como el axioma del supremo que veremos a lo largo del tema. Dicha propiedad es equivalente a la de la máxima cota inferior y es la que dota de completitud a $\mathbb{R}$.

3. Conjunto de los Números Reales, $\mathbb{R}$

Nosotros, sin embargo, seguiremos la idea de Hilbert y consideraremos a los números reales como objetos mismos, que sin definir, verificarán ciertos axiomas de los que se extraerán posteriores propiedades. Su *construcción* será entonces axiomática.

Supongamos la existencia de un cierto conjunto no vacío de elementos, al que denotaremos $\mathbb{R}$ y que llamaremos conjunto de los **Números Reales.** Dicho conjunto satisfará un cierto número de propiedades que se dividirán en tres grupos: axiomas de cuerpo, axiomas de orden y un último axioma llamado de completitud, o también axioma del supremo o axioma de continuidad.

Axiomas de cuerpo

Además de admitir la existencia de $\mathbb{R}$ aceptamos también la de dos operaciones, que llamaremos *adición* o *suma*, y *producto* o *multiplicación*, denotadas por $+$ y $\cdot$ respectivamente, tales que verifican:

Axioma 1) $x + y = y + x$ y $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Axioma 2) $x + (x + z) = (x + y) + z$ y $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Axioma 3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Axioma 4) Existen dos números reales distintos, que denotaremos como 0 y 1 tales que $0 + x = x + 0 = x$ y $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Estos números se llamarán elementos neutros con respecto a la adición y al producto de $\mathbb{R}$.

Axioma 5) Existencia de elemento simétrico para la suma, esto es, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$

Axioma 6) Existencia de elemento inverso para el producto salvo para el neutro de la suma, esto es, para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$

Estos axiomas dotan a $\mathbb{R}$ de estructura de cuerpo. A partir de ellos podemos deducir todas las propiedades elementales de la aritmética, por ejemplo: $-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $-(x - y) = -x + y$, etc. O también, si $x + y = z + y$ entonces $x = z$, o $x \cdot y = z \cdot y$ con $y \neq 0$ entonces $x = z$, etc. Habitualmente abusaremos de la notación y omitiremos ”$\cdot$” cuando escribamos el producto de dos números, es decir, $xy = x \cdot y$.

Axiomas de orden

Con este nuevo grupo de axiomas dotamos a $\mathbb{R}$ de un nuevo concepto en el que vamos a decidir si un número es anterior o posterior a otro, considerando que el orden decide la situación dentro del conjunto. Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ llamado conjunto de los números positivos, tal que:

Axioma 7) Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $xy \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 8) Para cada $x \neq 0$ se tiene que $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambas.

Axioma 9) $0 \neq \mathbb{R}^+$

Con estos tres últimos axiomas podemos introducir los símbolos $<, >, \leqslant$ y $\geqslant$:

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$$

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+ \text{ ó } y - x = 0$$

Análogamente diremos que $x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x > 0$. En el caso de que un elemento no sea positivo ni cero, diremos que es negativo y que se encuentra en $\mathbb{R}^-$, donde

$$\mathbb{R}^- = \mathbb{R} - (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$$

Obtenemos por definición una partición disjunta de los reales en positivos, negativos y cero.

De estos axiomas se deducen sin complicaciones todas las reglas usuales con desigualdades:

1) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene o bien que $a < b$, o bien que $a > b$, o bien $a = b$; y solo una de ellas. Esta propiedad dota a $\mathbb{R}$ de un orden total.

2) Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

3) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

4) Para todo $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 0$, es $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

5) $1 > 0$.

6) ...

El resultado que añadimos a continuación no es más que una consecuencia directa de los axiomas.

Proposición 3.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \leqslant y + \epsilon$, entonces $x \leqslant y$*

Demostración: En efecto, si $y < x$ podemos tomar $\epsilon = \frac{x-y}{2}$ y tendríamos:

$$y + \epsilon = y + \frac{x - y}{2} = \frac{2y + x - y}{2} = \frac{x + y}{2} < \frac{x + x}{2} = x$$

lo que lleva a contradicción.

$\otimes$

Axioma del supremo

Dos definiciones antes de entrar en el axioma.

Definición 3.2 *Sea S un subconjunto de números reales. Si existe un número b tal que $x \leqslant b$ para todo $x \in S$ diremos que S está acotado superiormente por b. En este caso diremos que b es cota superior de S.*

Definición 3.3 *Sea S un subconjunto de números reales acotado superiormente. Si b es una cota superior, diremos que es el supremo de S si ningún elemento menor que b es también cota superior de S. Lo denotaremos como $b = \sup S$.*