JORGE MORRA

Tema 13. Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 13. Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el decimotercer cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de polinomios, operaciones, fórmula de Newton, divisibilidad de polinomios y fracciones algebraicas.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este decimotercer cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, junio de 2020

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado bastantes sin demostrar. Es aconsejable que los restantes se intenten, las demostraciones que se dejan para el lector deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La sección *introducción* no es muy extensa y debe añadirse al completo. Es importante conocer la idea de que los polinomios se introducen con el nacimiento del álgebra abstracta.

- La sección *anillos de polinomios* también debe añadirse al completo, en ella se define el concepto de polinomio, y las operaciones entre ellos. La notación puede resultar algo engorrosa pero es necesaria. El lector puede cambiar cuando lo considere oportuno a la notación convencional de los polinomios. Tenga en cuenta, si lo hace antes de cuando lo hace el tema, que todas las demostraciones que utilizan la primera notación debe, o bien reajustarlas a la convencional, o bien omitirlas.

- De la sección *propiedades de* $A[X]$ deben enunciarse y demostrarse las correspondientes a la idea de dominio. Los homomorfismos de evaluación pueden simplemente enunciarse, así como el grado de un polinomio o la idea de polinomio homogéneo. Las unidades pueden sencillamente omitirse siempre que en nuestro desarrollo expongamos que trabajaremos con anillos cuya única unidad sea el neutro del producto.

- La sección *binomio de Newton* debe introducirse al completo. El teorema debe enunciarse y demostrarse.

- De la sección *divisibilidad de polinomios* es necesario explicar y desarrollar el concepto de divisibilidad y de división euclídea. Es sumamente importante la parte de los dominios euclídeos, de los dominios de ideales principales y de los dominios de factorización única puesto que aquí se explica cuáles son las características básicas de la división en los anillos de polinomios. Los teoremas del resto y del factor deben, al menos, enunciarse; la regla de Ruffini debe enunciarse y demostrarse. La prueba de ésta última es como la del *binomio de Newton*, engorrosa, y aunque es seguro que el tribunal conoce la *regla*, no es tan seguro que esté familiarizado con su demostración.

- De la sección *fracciones algebraicas* debe definirse el concepto, y debe desarrollarse cómo es la creación del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad. Deben demostrarse todas sus propiedades.

2. Introducción

Los polinomios comienzan su andadura junto a lo que se ha denominado en Matemáticas el Álgebra Abstracta. Los orígenes de nuestra ciencia tienen su principio en la aritmética; fijémonos que era tan necesario aprender a contar como qué era lo que se quería contar. Los números naturales y posteriormente las fracciones fueron los primeros pasajeros de las civilizaciones antiguas. Después se añadió la geometría, y a medida que fue avanzando la ciencia se incorporaron otras disciplinas relacionadas con ambas. El del Álgebra tuvo su génesis en el momento en el que el hombre necesitó extrapolar los conocimientos puramente aritméticos a aquellos que constituían suposiciones, en esencia cuando sustituyó el número por la letra. Así surgieron las ecuaciones, que justifican su existencia a la necesidad de resolver problemas concretos. Pero en aquella Álgebra no entraban todavía los polinomios, estaba limitada a la resolución de ecuaciones.

El término Álgebra proviene de la principal obra del matemático de origen persa Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi[1], allá por el año 820. En dicha obra al-Jwarizmi resuelve ecuaciones de primer y segundo grado dando una técnica para ello. Recordemos a este respecto que aunque los griegos ya conocían las soluciones de estas ecuaciones, nunca utilizaron los métodos que nos encontramos en el tratado de al-Jwarizmi. Curiosamente el término Álgebra proviene concretamente de *al-yabr*, que no era más que la operación algebraica de pasar los términos negativos de un miembro de una ecuación al otro miembro transformándolos en positivos. Dichos términos eran, en algunos casos, lo que llamamos *indeterminadas* o *variables.*

El paso siguiente fue lo que convirtió el Álgebra conocida hasta ese momento en lo que ahora definimos como Álgebra Abstracta. Esto se hizo al concebir que cada término de una ecuación tuviera entidad propia. Pero para que todo tuviese sentido era necesario introducir las operaciones entre las indeterminadas o las variables con las que se estaba trabajando. Así, era necesario conocer por ejemplo qué significaba $x^2 + x$, aunque esta expresión no encontrara un problema aritmético detrás que justificara su existencia. Las indeterminadas podrían ser varias, no limitarse a una de ellas, x, y, z, etc., y las operaciones no tendrían que limitarse a la suma o el producto conocidos en la aritmética. Aparecen entonces nuevas leyes de composición entre elementos, con nuevas propiedades que forman y constituyen diferentes estructuras como grupos, anillos, cuerpos, etc. El trabajo con *indeterminadas* dentro de estos nuevos conjuntos es lo que a grandes rasgos denominamos *polinomios.*

[1]Con el tiempo, y a raíz del nombre de este gran matemático, se introdujo el concepto de *algoritmo*, término que designa un método o procedimiento sistemático de cálculo.

3. Anillos de polinomios

No creo que me equivoque mucho si afirmo que el lector ya tiene una idea bastante completa de lo que es un polinomio y de las operaciones que puede realizar con él. A una temprana edad matemática nos enseñan lo que son. Aprendemos a sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios aunque desconozcamos para qué nos va a servir. Nos enseñan el concepto de grado aunque tampoco sepamos la importancia de tal concepto.

A lo largo del tema introduciremos la idea de polinomio en una o varias indeterminadas o variables, así como las operaciones que podemos hacer entre ellos. El conjunto de los polinomios adquirirá una estructura que será la de anillo.

Consideremos un conjunto finito X:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Denotemos como $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, y llamemos M^n al conjunto formado por $n-$uplas de números naturales que incluyen al cero:

$$M^n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) : u_i \in \mathbb{N}^*\}$$

Obviamente $M^2 = \{(u, v) : u, v \in \mathbb{N}^*\}$; y también $M^1 = M = \mathbb{N}^*$.

La idea que subyace detrás es la de que cada uno de los elementos de M^n no es más que un monomio como lo conocemos desde el colegio. Por ejemplo, si $X = \{x, y, z\}$, entonces el monomio $(2, 3, 4)$ de M^3 se correspondería con $x^2y^3z^4$; y en general, $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ lo haría con $x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$. Además, el elemento formado exclusivamente por ceros, $(0, 0, \ldots, 0)$ se correspondería con $x_1^0x_2^0 \ldots x_n^0 = 1$. Veremos más adelante su analogía con el neutro del producto del anillo en el que construiremos nuestros polinomios.

En M^n podemos definir la suma y el producto por un número natural.

- Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ entonces $u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$.
- Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $r \in \mathbb{N}$ entonces $r \cdot u = (ru_1, ru_2, \ldots, ru_n)$

Es fácil observar que la suma así definida representa al producto de monomios; y que el producto por un número natural la potencia de un monomio.

También podemos considerar las $n-$uplas formadas por ceros en todas sus coordenadas salvo en una de ellas que contendría un 1, es decir, del tipo: $(1, 0, \ldots, 0)$ ó también $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Para este tipo de elementos de M^n podemos denotar:

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots$$

$$x_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Así, cada $u \in M^n$ puede escribirse de forma única como

$$u = u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 + \ldots + u_n \cdot x_n$$

En esencia lo que acabamos de decir es que un monomio como por ejemplo $x^2y^3z^4$ sería:

$$x^2y^3z^4 = (2,3,4) = 2 \cdot (1,0,0) + 3 \cdot (0,1,0) + 4 \cdot (0,0,1)$$

Estamos poniendo las bases pero necesitamos un conjunto dónde se encuentren los coeficientes que tendrán estos monomios. Consideremos un anillo $(A, +, \cdot)$, y consideremos también una aplicación p:

$$\begin{array}{rccc} p: & M^n & \longrightarrow & A \\ & u & \longmapsto & p(u) \end{array}$$

La imagen de cualquier elemento de M^n por p es un elemento de A. La interpretación que observamos detrás de esta definición es clara, la imagen de cada monomio será el coeficiente que dicho monomio tenga.

Es necesario restringir de alguna forma la aplicación p puesto que nuestro conjunto M^n tiene infinitos elementos, y sin embargo nuestra idea de polinomio es la de una expresión formada por una suma finita de monomios. Por ello pedimos además que la imagen de todos los elementos de M^n salvo a lo sumo de un número finito, sea cero. Con esta restricción nos aseguramos que solamente tengan coeficiente distinto de cero unos cuantos monomios de M^n, y con ello nos aseguramos que el *polinomio* que estamos construyendo no está formado por infinitos términos.

Ya estamos en condiciones de definir nuestro anillo de polinomios.

Definición 3.1 *Dado A anillo, definiremos como $A[X]$ como el conjunto:*

$$A[x] = \{p : M^n \longrightarrow A : p(u) \neq 0 \ \ \forall u \in P \ \ y \ p(u) = 0 \ \ \forall u \notin P\}$$

donde P, o bien es vacío, o bien es un cierto subconjunto finito de M^n.

Resulta que $p(u)$ no es más que el coeficiente que tiene el monomio u dentro de p. En el caso de que la imagen de todos los elementos de M^n sea el cero estaríamos en el caso del polinomio 0, que escribiríamos igual que el cero de A.

3.1. Operaciones en A[X]: suma y producto

Además en $A[X]$ podemos definir dos operaciones directamente relacionadas con las que ya tenemos en A, y que también, abusando de la notación, llamaremos de la misma forma que en A.

Definición 3.2 *Dados p y q de $A[X]$ se define su suma como el polinomio $p+q : M^n \longrightarrow A$ donde $(p+q)(u) = p(u) + q(u)$.*

$$\begin{array}{rccc} p+q: & M^n & \longrightarrow & A \\ & u & \longmapsto & (p+q)(u) = p(u) + q(u) \end{array}$$

La suma de polinomios resulta ser otro polinomio en el cual el coeficiente de cada monomio es la suma de los coeficientes de los monomios de cada polinomio original.

Es fácil demostrar que es una operación interna puesto que el conjunto de elementos tales que $p(u) + q(u) \neq 0$ es como mucho finito.

Definición 3.3 *Dados $p, q \in A[X]$ dos polinomios, se define su producto, $p \cdot q : M^n \longrightarrow A$ como*

$$(p \cdot q)(w) = \sum_{u+v=w} p(u)q(v)$$

Resulta también una suma finita de términos. El producto de polinomios es otro polinomio en el cual el coeficiente de cada monomio resulta ser la suma de los productos de los coeficientes de los monomios que dan dicho monomio.

Dicho esto, ahora podemos demostrar que $A[X]$ tiene en realidad la misma estructura que A, con las operaciones de suma y producto definidas antes. De aquí en adelante consideraremos que X es un conjunto como lo definimos antes, y consideraremos también a $A[X]$ como el anillo de polinomios[2] de A en las indeterminadas[3] de X.

4. Propiedades de (A[X], + , ·)

Teorema 4.1 *Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y X un conjunto, entonces $(A[X], +, \cdot)$ es un anillo.*

Demostración: Comprobaremos en primer lugar que $(A[X], +)$ tiene estructura de grupo conmutativo.

Sean $p, q, r \in A[X]$ tres polinomios. Por la propiedad asociativa de la suma en A se tiene:

$$\begin{aligned}((p+q)+r)(u) =& (p+q)(u) + r(u) = (p(u)+q(u)) + r(u) = \\ =& p(u) + ((q(u)+r(u))) = p(u) + ((q+r)(u))\end{aligned}$$

con lo que $(p + q) + r = p + (q + r)$

Además, siendo $0 \in A$ el elemento neutro con respecto a "+", podemos considerar al polinomio

$$\begin{array}{rccl} 0: & M^n & \longrightarrow & A \\ & u & \longmapsto & 0(u) = 0 \end{array}$$

Con

$$(p+0)(u) = p(u) + 0(u) = p(u) + 0 = p(u)$$

$$(0+p)(u) = 0(u) + p(u) = 0 + p(u) = p(u)$$

con lo que $p + 0 = 0 + p$, y 0 es el elemento neutro de $A[X]$.

[2]El lector puede pensar, y con razón, que estoy dando por hecho que $A[X]$ es un anillo, independientemente de cómo sea A. Lo cierto es que para que todo tenga sentido, el conjunto en el que se construye debe verificar las propiedades de anillo. Esto es algo que demostraremos en la siguiente sección, pero que no se ha hecho hasta ahora.

[3]Utilizaré indistintamente el nombre de *indeterminada* o de *variable*.