

JORGE MORRA

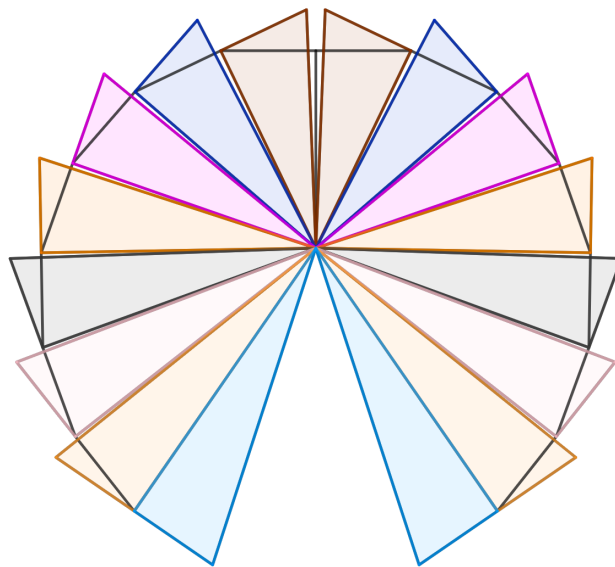
Tema 16.  
Discusión y resolución de  
sistemas de ecuaciones  
lineales.

Teorema de Rouché.  
Regla de Cramer.  
Método de Gauss-Jordan.

OPOSICIONES  
MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 16.  
Discusión y resolución de  
sistemas de ecuaciones  
lineales.  
Teorema de Rouché.  
Regla de Cramer.  
Método de Gauss-Jordan.



OPOSICIONES  
MATEMÁTICAS

## Prólogo

Tiene delante el lector el decimosexto cuadernillo de la serie "Oposiciones Matemáticas", concretamente el de discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, teorema de Rouché, regla de Cramer y método de Gauss-Jordan.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *"ese algo"* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *"entretenerlos"*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la "guinda" al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *"a conciencia"*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. "A conciencia" significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este decimosexto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: [jorgemorra@outlook.es](mailto:jorgemorra@outlook.es). Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, septiembre de 2020

# Índice

	Página
<b>1. ¿Cómo preparar este tema?</b>	<b>6</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>3. Sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>8</b>
3.1. Sistemas homogéneos . . . . .	12
3.2. Variedades lineales . . . . .	12
<b>4. Discusión de sistemas. Teorema de Rouché-Frobenius</b>	<b>14</b>
<b>5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>17</b>
5.1. Método de la matriz inversa . . . . .	17
5.2. Regla de Cramer . . . . .	18
5.3. Método de Gauss-Jordan . . . . .	20
5.3.1. Equivalencia de sistemas . . . . .	24
5.3.2. Forma escalonada reducida por filas. . . . .	24
<b>6. Conclusiones</b>	<b>28</b>

## 1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado algunos sin demostrar. Las demostraciones que se dejan para el lector deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La *introducción* debe incluirse al completo. En ella se hace un desarrollo histórico de los procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, además de caracterizarlos en cuanto a sus soluciones.
- De la sección *sistemas de ecuaciones lineales* es importante enunciar al menos el teorema 3.1 porque justifica gran parte de los procedimientos y resultados posteriores. Su demostración no es necesario incluirla aunque sí conocerla. Dentro de esta parte es importante la parte de los sistemas homogéneos y de las variedades lineales. Téngase en cuenta que éstas últimas pueden ser consideradas como los subconjuntos solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- De la sección *discusión de sistemas y teorema de Rouché-Frobenius* debe hacerse la clasificación de los éstos, además de definir el rango de una matriz. La proposición 4.4 y el teorema de *Rouché-Frobenius* deben enunciarse y demostrarse. Son importantes también las observaciones 4.6.
- La parte de la *resolución de sistemas de ecuaciones lineales* contiene tres métodos: el de la matriz inversa, el de Cramer y el de Gauss-Jordan. Es importante incluir los tres. El primero es sencillo y está muy relacionado con el isomorfismo habido entre matrices y endomorfismos. La *Regla de Cramer* debe enunciarse y demostrarse, al fin y al cabo es un punto del tema; y lo mismo ocurre con el método de *Gauss-Jordan*. Sobre éste último es también básico justificar matricialmente el procedimiento con los conceptos de matrices equivalentes. Es necesario entender todas las ideas que se encuentran detrás y desarrollarlas. De esta parte son importantes los ejemplos. El primero a incluir es el relacionado con las matrices equivalentes por filas o columnas; y el segundo es la resolución de uno cualquiera de los dos sistemas que se encuentran

al final del tema, resueltos por el método de Gauss-Jordan. Elija el lector el que considere de estos últimos.

## 2. Introducción

Las primeras referencias de la existencia de los sistemas de ecuaciones lineales datan incluso de la matemática en Babilonia, aunque el problema original, o más concretamente el método de eliminación de incógnitas, proviene de la antigua china. En el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, de los siglos II y I a. C. aparece el siguiente problema:

*Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?*

Lógicamente, además del problema, encontramos un procedimiento para su resolución conocido como la regla *Fang-Cheng* que fue el antecedente al que conocemos como de *Gauss-Jordan* o también *eliminación gaussiana*. El porqué lo conocemos con el nombre de Gauss o de Gauss-Jordan se debe a que fueron ambos los que lo aplicaron de forma habitual en la resolución del problema de los mínimos cuadrados.

Aunque el procedimiento era considerado relativamente trivial, con la llegada de los ordenadores se volvió casi imprescindible. La regla de Cramer, de la que hablaremos en líneas posteriores, suponía otra forma de resolver un sistema, pero no simplificaba los cálculos. El hecho es que de forma general, los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se complicaban casi exponencialmente cuando aumentaba el número de incógnitas y ecuaciones. Alan Turing (1912-1954) tardó en 1946 dos semanas para resolver un sistema de 18 ecuaciones con 18 incógnitas. Aún con ello, el número de operaciones requerido en la resolución de un sistema era ostensiblemente inferior utilizando la eliminación gaussiana, que con los determinantes de Cramer. Esto provocó que con la llegada de la informática comenzara a ser el más utilizado.

Pero volvamos a Cramer. Actualmente se conoce como la *Regla de Cramer* a un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Es curioso que dicha regla no se deba a Gabriel Cramer (1708-1752), sino a Colin Maclaurin (1698-1746), aunque no se publicó hasta 1748, dos años después de su fallecimiento; y dos años antes también de la publicación de Cramer de la misma en su *Introducción al análisis de curvas algebraicas*. La razón del porqué ha llegado hasta nuestros días con el sobrenombre de Cramer se debe principalmente a la notación utilizada por éste, más clara y concisa que la de Maclaurin. De todas formas, ni Cramer ni Maclaurin hablaban de determinantes en su desarrollo, ni tan siquiera un poco más tarde Bézout, quien en un trabajo presentado en 1779, *Teoría general de las ecuaciones algebraicas*, daba un método para resolver sistemas de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas muy similar al de Cramer y Maclaurin.

El avance en su resolución vino con el álgebra abstracta, con las matrices y los determinantes. La introducción del rango de una matriz permitió dar unas condiciones necesarias y suficientes para que un sistema tuviera solución. En 1875 Eugène Rouché, matemático

francés del siglo XIX, publicó un artículo donde enunciaba el teorema que hoy conocemos como el de Rouché-Frobenius. Curiosamente ese mismo año otro matemático francés publicaba un resultado similar; y también en Italia, Alfredo Capelli daba una *variación* de la misma idea. Hasta tal punto llegan a aparecer publicaciones que en Francia al teorema de Roché-Frobenius se le conoce como el teorema de Rouché-Fontené; en Italia como el de Rouché-Capelli; y en Alemania y en otros países, debido a que Leopold Kronecker utilizó los resultados de Capelli para dar una *demostración* alternativa, como el de Kronecher-Capelli. En España es el matemático Julio Rey Pastor el que le da el nombre de teorema de Rouché-Frobenius.

### 3. Sistemas de ecuaciones lineales

Nuestra idea será desarrollar toda la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales sobre la base de las matrices y las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. En todo el tema trabajaremos con un cuerpo  $\mathbb{K}$  de característica cero. Partimos además de que la familia de matrices con  $m$  filas y  $n$  columnas tiene estructura de espacio vectorial. Si  $m = n$  entonces además de ser espacio vectorial es un álgebra. Partimos también de que el conjunto de aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales  $\mathbb{K}^n$  y  $\mathbb{K}^m$  tiene también la misma estructura de espacio vectorial, o si  $m = n$ , la de álgebra.

Es posible demostrar que ambas estructuras son isomorfas. Cada matriz estaría íntimamente relacionada con una aplicación lineal y viceversa. Esto permitiría asociar, en el caso de las álgebras, al producto de matrices una composición de aplicaciones lineales por ejemplo, o también demostraría que si una aplicación lineal es un isomorfismo, entonces su matriz asociada tiene inversa. No obstante en el desarrollo de nuestro tema no demostraremos un resultado tan completo, nos limitaremos a definir el isomorfismo y a probar que *vistos* como espacios vectoriales, sí son isomorfos.

**Teorema 3.1** *El espacio vectorial de las aplicaciones lineales entre  $\mathbb{K}^n$  y  $\mathbb{K}^m$  es isomorfo al espacio vectorial de las matrices de  $m$  filas y  $n$  columnas sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ ,  $\mathcal{M}_m^n(\mathbb{K})$ .*

**Demostración:** Llamemos al espacio de las aplicaciones lineales como  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ . Sabemos que una aplicación entre dos espacios vectoriales está completamente definida cuando se da la imagen de cada uno de los elementos de la base. Consideremos  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ , y tomemos las bases canónicas de  $\mathbb{K}^n$  y  $\mathbb{K}^m$ , que llamaremos  $\{e_j\}$  con  $j = 1, 2, \dots, n$  y  $\{e'_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ . Se tiene

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

con  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) &\longrightarrow \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \phi(f) = A \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Nótese que cada columna  $j$  tiene precisamente las coordenadas de  $f(e_j)$  en la base  $\{e'_i\}$  de  $\mathbb{K}^m$ . Es más, fíjese el lector que el producto de  $A$  por el vector  $e_j$  es precisamente dicha columna:

$$A \cdot e_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Veremos primeramente que  $\phi$  se encuentra bien definida. Sean  $f$  y  $g$  aplicaciones lineales, tales que  $f = g$ . Entonces para cada  $x \in \mathbb{K}^n$  se tiene  $f(x) = g(x)$ , en particular para los vectores de la base,  $f(e_j) = g(e_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Sean  $F, G \in \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K})$  tales que,  $\phi(f) = F$  y  $\phi(g) = G$ .

Para cada  $e_j$  tenemos

$$F \cdot e_j = f(e_j) = g(e_j) = G \cdot e_j$$

Pero  $F \cdot e_j$  es la columna  $j$ -ésima de  $F$ , que coincide con la columna  $j$ -ésima de  $G$ ,  $G \cdot e_j$ . Como las columnas de ambas matrices coinciden, éstas serán iguales.

Para ver que es un homomorfismo, sean  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ .

- Sean  $H = \phi(f + g)$ ,  $\phi(f) = F$  y  $\phi(g) = G$ . Sabemos que cada columna  $F_j$  de  $F$  es la imagen del vector  $j$ -ésimo de  $\mathbb{K}^n$  por  $f$ ,

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

Análogamente

$$g(e_j) = \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ a'_{2j} \\ \vdots \\ a'_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m a'_{ij} e'_i$$

Su suma:

$$f(e_j) + g(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} + a'_{1j} \\ a_{2j} + a'_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} + a'_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + a'_{ij}) e'_i$$

Pero las columnas de  $H$  son las imágenes de los elementos de la base canónica de  $\mathbb{K}^n$  para  $f + g$ , es decir,:

$$H = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \cdots & a''_{1n} \\ a''_{21} & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{m1} & a''_{n2} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

$$(f + g)(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

Por consiguiente  $A = F + G$

- Sea  $\lambda \in \mathbb{K}$ , y sea  $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  La demostración es prácticamente idéntica y puede hacerla el lector.

Nos queda ver que es biyectiva. Supongamos que  $\phi(f) = \phi(g)$  entonces  $F = G$ , y así  $a_{ij} = a'_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ , y  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Entonces las coordenadas de cada  $e_j$  por la imagen de  $f$  y  $g$  coinciden:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^m a'_{ij} e'_i = g(e_j)$$

y como  $f$  y  $g$  coinciden en todos los elementos de la base, son iguales. Esto nos lleva a la inyectividad de  $\phi$ .

Sea ahora  $A \in \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K})$ , con  $A = (a_{ij})$ . Definimos  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  como  $f(x) = A \cdot x$ , donde  $x$  es un vector columna de  $\mathbb{K}^n$ . En realidad:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Aplicando la distributiva del producto con respecto a la suma de matrices se tiene:

- $f(x + y) = A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = A \cdot (\lambda x) = (\lambda)A \cdot x$

Por tanto  $\phi$  es isomorfismo.

⊗

**Observación 3.2** *No vamos a demostrar, aunque hemos hecho una mención al caso, que cuando  $m = n$  estamos hablando de matrices cuadradas,  $\mathcal{M}_n^n$ , y de los endomorfismos  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ . En estos espacios se encuentra definido el producto de elementos y tienen estructura de álgebra. En  $\mathcal{M}_n^n$  es el producto conocido de matrices, y en  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$  es la composición de endomorfismos.*

*El isomorfismo  $\phi$  entre estos espacios asocia el producto de matrices a la composición de endomorfismos y viceversa. Lógicamente si  $\phi(f) = A$  y  $f$  es un isomorfismo entonces  $\phi(f^{-1}) = A^{-1}$ . También quiere decir que si una matriz tiene inversa, su endomorfismo asociado es en realidad un isomorfismo.*

Lo siguiente será definir el concepto de sistema de ecuaciones lineales.