JORGE MORRA

Tema 17. Programación lineal. Aplicaciones.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 17. Programación lineal. Aplicaciones.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el decimoséptimo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de Programación Lineal y aplicaciones.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este decimoséptimo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, octubre de 2020

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar. Ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado algunos sin demostrar.

- La *introducción* debe añadirse al completo, en ella se tratan los conceptos históricos de la programación lineal.

- De la sección *programación lineal* es necesario definir lo que se conoce como un problema de programación lineal, así como su forma de plantearlo utilizando el álgebra de las matrices. El ejemplo es necesario estudiarlo, aunque no tanto su introducción en el desarrollo.

- De la sección *conjuntos convexos* son importantes todas las definiciones, así como enunciar y demostrar el teorema 4.9, ya que es el que identifica los vértices con las soluciones básicas. Todas las observaciones y resultados restantes deben introducirse aunque no demostrarse. También debe introducirse el ejemplo 4.13.

- Del *Método Simplex* es importante aportar un breve inciso histórico además de incluir las condiciones para su aplicación. De los dos teoremas de esta sección, el teorema 5.1 y el teorema 5.2, deben enunciarse ambos y demostrarse aquel que considere el lector. Hay que entender que entre los dos se justifica el algoritmo del Simplex. El ejemplo 5.3 también debe estudiarse y desarrollarse al completo.

- La sección del *problema dual* debe incluirse al completo. No se ha incluido ninguna demostración pero sí un ejemplo. El teorema dual debe enunciarse.

- La sección *aplicaciones* debe añadirse integramente, los ejemplos no son necesarios, pero sí todas las aplicaciones.

- La sección *conclusiones* es propia de cada lector y del desarrollo del tema que haga.

2. Introducción

La *programación matemática* es una parte de las matemáticas que se encarga de la resolución de problemas en los que se determinan los extremos de una serie de funciones dentro de subconjuntos de espacios vectoriales de dimensión finita. Estos subconjuntos suelen venir dados por restricciones lineales o no lineales y los espacios vectoriales son del tipo $\mathbb{K}^n$ donde $\mathbb{K}$ es cuerpo. La programación matemática es una parte de lo que conocemos como *Investigación Operativa*, y dentro de ella se diferencia una subparte conocida como *Programación Lineal*, en la que las funciones a maximizar o minimizar son lineales.

La programación lineal se desarrolla a partir de la segunda guerra mundial con el fin de resolver problemas de recursos, entre ellos el conocido como *problema del transporte*. En dicho problema se trataba de realizar la planificación de cómo transportar cierto producto desde los centros de producción a los centros de consumo. Dicho problema fue formulado originalmente y de forma paralela por los economistas y premios Nobel en 1975, Tjalling C. Koopmans (1910-1985) y Leonid V. Kantorovich (1912-1986).

Los trabajos de Kantorovich comienzan a finales de la década de los treinta. Su idea era maximizar una función lineal dentro de un poliedro convexo. La extinta Unión Soviética no permite que su publicación salga fuera de las fronteras de la URSS y en Europa no se conocen hasta finales de la década de los cincuenta.

Al margen del problema del transporte, se analizan, al finalizar la segunda guerra mundial, el conocido como *problema de la dieta*, del economista y también premio Nobel en 1982, George J. Stigler (1911-1991). Fue una de las primeras aplicaciones de la Programación Lineal. El gobierno estadounidense se planteo el problema de seleccionar de entre un conjunto de alimentos aquellos que tuvieran un máximo nivel nutritivo con unas restricciones de cantidades, costes etc. Se trataba de optimizar una función con 77 variables y 9 restricciones. Utilizando la programación lineal el problema fue resuelto por Stigler en 1947.

No obstante, la forma de resolver ambas cuestiones y otras que se pudieran plantear en las que hubiera que optimizar una función lineal bajo unas condiciones concretas, tenía grandes dificultades. Se demostró que el óptimo se alcanzaba en los vértices del subconjunto de restricciones. El problema surgía porque no era aceptable el tener que comparar el valor que tomaba la función en cada uno de los extremos puesto que el número de estos podía ser considerablemente alto. En este caso la cantidad de operaciones a realizar era sumamente grande.

A este respecto, George Dantzig (1914-2005), este sí matemático, idea un método revolucionario que es el que se conoce hoy día como el *método del simplex*. Una de sus primeras aplicaciones estuvo relacionada con el bloqueo de Berlín en 1948, que fue el cierre de las fronteras que mantenían los ingleses y americanos con la Unión Soviética. Dicho bloqueo supuso la creación de un puente aéreo que suministrara bienes a parte de la población berlinesa. El plan de abastecimiento se resolvió utilizando la programación lineal y el método simplex ideado por Dantizg.

La llegada de los ordenadores simplificó sustancialmente el tiempo medio de las operaciones requeridas en cualquier problema. En la década de los sesenta IBM comenzó a fabricar ordenadores que eran capaces de resolver problemas con centenares de restricciones, y en la de los ochenta con miles de ellas.

En 1947 John von Neumann (1903-1957) relacionó la teoría de matrices que había desarrollado para su Teoría de Juegos, con la Programación Lineal. Con ello consiguió dar los fundamentos necesarios a una teoría que estaba naciendo y que necesitaba consolidarse matemáticamente.

3. Programación lineal

En todo el tema nuestro cuerpo será el de los números reales, lo que quiere decir que las soluciones se buscarán dentro de $\mathbb{R}$ y los coeficientes a_{ij} como los términos b_j y c_j serán números reales.

En muchos casos los problemas relacionados con la programación lineal son de índole económico. Pongamos un ejemplo. Supongamos que queremos fabricar una diversidad de artículos. Necesitamos utilizar m factores de producción, tales como materia prima, mano de obra, maquinaria, combustible, transporte, etc; y además supongamos que existen n procedimientos de producción. Se pretende calcular la cantidad de factores que serán necesarios utilizando uno u otro procedimiento con el fin de maximizar la producción.

Sea c_j la cantidad de artículos que son fabricados por unidad de tiempo en el $j-$ésimo procedimiento. Sea a_{ij} la inversión del $i-$ésimo factor en el $j-$ésimo procedimiento. Sean b_i los recursos del $i-$ésimo factor de producción y x_j el tiempo planificado para el $j-$ésimo procedimiento.

Es fácil ver que, siendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ los tiempos requeridos para cada procedimiento, y b_j las limitaciones de los recursos, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_j$$

es precisamente la inversión que se realiza en total con el $i-$ésimo factor de producción. Esta inversión se encuentra acotada por razones externas al recurso.

También podría ocurrir que no existieran limitaciones sino exigencias de producción, bien legales o de otro tipo. En este caso tendríamos

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_j$$

exigiendo que el valor superara uno concreto.

Se plantea el problema de hallar la distribución óptima para estos valores al maximizar o minimizar la expresión:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Al plantear un problema de programación lineal se suelen introducir unas *variables de holgura* en los casos $\leqslant$ y $\geqslant$, transformando las desigualdades en igualdades. Estas variables se añaden a la función objetivo con un coeficiente cero.

Así, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_j$ se transforma en $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_j$; y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_j$ en $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_j$.

Definición 3.1 *Llamaremos región factible R al subconjunto de $\mathbb{R}^n$:*

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, x_j \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

Si el conjunto R es vacío entonces el problema no tendrá solución, y si no existen restricciones entonces será $\mathbb{R}^n$. Consideraremos también que no existen restricciones redundantes, en otro caso se habrían eliminado.

La región factible puede *verse* como una intersección finita de subconjuntos cerrados, por lo que es a su vez un conjunto cerrado.

En origen el número de restricciones, m y el de variables, n, no tienen porqué guardar ninguna relación; es posible $n = m$, $n < m$ y también $n > m$. No obstante cuando se introducen las variables de holgura, transformamos las desigualdades en igualdades, llegando a un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas. Sabemos por el teorema de Rouché-Frobenius que el sistema tiene solución siempre que el rango de las matrices de los coeficientes y ampliada coincidan.

Supongamos, como ya hemos dicho, que las restricciones redundantes se han eliminado, entonces:

- Si $m = n$ la matriz de los coeficientes es cuadrada y el rango es el máximo posible. En este caso la región factible la compone un único punto $x \in \mathbb{R}^n$.
- Si $m > n$ tendríamos mayor número de ecuaciones que de incógnitas pero partiendo de que no existen restricciones redundantes nos encontraríamos con un sistema sin solución, con lo que $R = \emptyset$.

En definitiva $m < n$ y ahora se puede suponer que el rango del sistema es m.

Denotaremos un problema de programación lineal por medio de matrices. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ serán vectores y se escribirán en columna. Así, siendo $c \in \mathbb{R}^n$, y para cada $x \in \mathbb{R}^n$, la función objetivo z podemos reescribirla:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c^t x$$

De la misma forma las restricciones $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j$ con $i = 1, 2, \ldots, m$ podemos denotarlas como $Ax = b$, donde A es una matriz de m filas y n columnas y b es un vector de $\mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Finalmente para decir que las componentes de los vectores factibles deben ser todas no negativas escribiremos sencillamente $x \geqslant 0$.

En definitiva un problema de programación lineal se reduce a optimizar una función lineal bajo unas condiciones de restricción. La *forma natural* de plantearlo incluye desigualdades, no obstante, la *forma estándar* es la habitual que resulta de añadir las variables de holgura. En todo el tema, para nosotros optimizar la función será *maximizarla*, aunque los resultados son análogos cuando se quiera minimizar. De aquí la siguiente definición:

Definición 3.2 (Forma estándar) *Un problema de programación lineal se dice que se encuentra planteado de forma estándar si se es escribe como*

$$\begin{array}{cc} \textit{maximizar} & c^t x \\ \textit{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de m filas y n columnas de rango m y cuyos elementos son reales, y b es un vector columna de $\mathbb{R}^m$.

Con esta notación la región 3.1 quedaría:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqslant 0\}$$

Definición 3.3 *Diremos que $x \in \mathbb{R}^n$, es una solución factible si $x \in R$. Diremos también que el problema es infactible si $R = \varnothing$.*

Dentro de las soluciones factibles tenemos que distinguir unas concretas que denominaremos básicas y otras que serán no-básicas.

Definición 3.4 *Llamaremos submatriz básica B a cualquier submatriz de A compuesta por m filas y m columnas tal que $B^{-1}b \geqslant 0$.*

Esta definición afirma implícitamente que el determinante de las submatrices básicas debe ser distinto de cero. Por otra parte, sabemos que siendo el rango de A igual a m podemos reordenar las columnas de A de tal forma que el determinante de la submatriz formada por las primeras m columnas sea distinto de cero. De todas las posibles reordenaciones descartaremos aquellas en las que, aunque el determinante sea distinto de cero, pueda ocurrir que $B^{-1}b$ tenga coordenadas negativas.