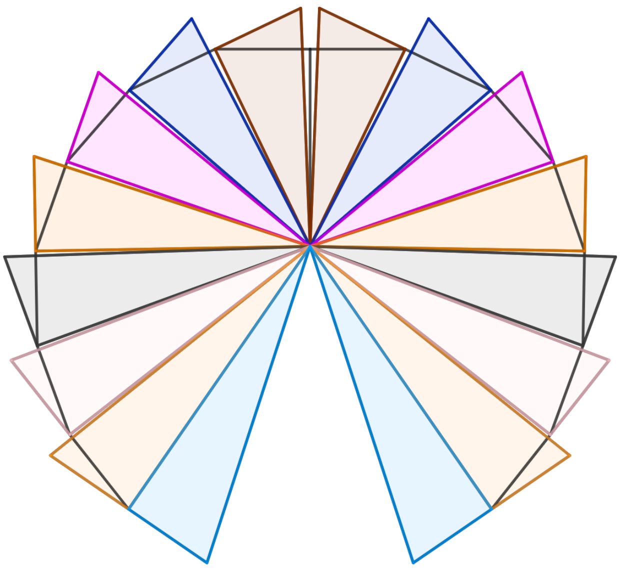
JORGE MORRA

Tema 18. Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 18. Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el decimoctavo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de matrices, álgebra de matrices, aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este decimoctavo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, noviembre de 2020

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado algunos sin demostrar. Las demostraciones que se dejan para el lector deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La *introducción* enclava las matrices en la historia. Sabemos que se conocían desde hace siglos, pero no fue hasta XIX, cuando Cayley las definió matemáticamente. Es importante desarrollar toda la parte histórica y su relación con otras ramas de las ciencias.

- De la parte *álgebra de matrices* deben introducirse las operaciones y las propiedades de éstas. Aunque solamente deben demostrarse dos resultados, el que afirma que el producto verifica la propiedad asociativa, y el que dice que es un álgebra no conmutativa de rango finito. Los restantes, aunque deben enunciarse, su demostración queda a criterio del opositor.

- De la parte *matrices y homomorfismos entre* $\mathbb{K}-$*módulos* es interesante la relación que existe entre los homomorfismos entre $\mathbb{K}-$módulos y las matrices. Debe enunciarse y demostrarse el teorema que afirma el isomorfismo entre el álgebra de las matrices y el de los endomorfismos de $\mathcal{U}$. A este respecto, probablemente el resultado más importante provenga del teorema 4.4. Toda la parte de los homomorfismos puede relacionarse con las matrices de cambio de base, que deben incluirse en su totalidad. La parte final de esta sección está dedicada a las matrices regulares y al cálculo de la matriz inversa. También es importante desarrollarla en su totalidad, definir las matrices equivalentes, las matrices elementales y su relación con el método de Gauss-Jordan. La introducción del ejemplo queda a decisión del lector.

- De la parte *rango de una matriz* debe definirse el rango y los resultados que se enuncian.

- De la parte *aplicaciones de las matrices* son importantes las relacionadas con las matemáticas, pero en este caso la más importante es la que proviene de la economía, concretamente la de las matrices de Leontief, así como las de transferencia. Si es posible, debe añadirse un ejemplo de cada una de ellas.

- De la parte *conclusiones* hemos puesto las que hemos considerado, sin embargo esta parte, necesaria al finalizar el tema, queda a expensas del lector.

2. Introducción

Aunque a lo largo de tiempo se han utilizando las matrices de forma implícita en muchos de los problemas y resoluciones matemáticas, la verdad es que hasta que Cayley no la introdujo explícitamente no podemos decir que comenzaron a descubrir todo su potencial.

Antes de su definición formal ya se utilizaban para resolver sistemas de ecuaciones. El método de Gauss-Jordan es un claro ejemplo, o el cálculo de lo que luego se llamó *determinante* y que se utilizaba en la conocida *Regla de Cramer*. Históricamente el *determinante* precedió a la *matriz*. De hecho el primero que utilizó la palabra *matriz* fue James Joseph Sylvester (1814-1897). Básicamente fue la forma que se le ocurrió al intentar referirse a la tabla de un determinante.

La novedad de Cayley no fue su invención, sino estructurar sus operaciones y aplicar éstas a los resultados en los que trabajaba en ese momento. Veamos como lo hizo. Tuvieron su origen concretamente en la teoría de transformaciones.

Pensemos en el plano, identifiquémoslo como $\mathbb{R}^2$ por ejemplo, y dada una pareja de puntos (x, y) pensemos en una transformación τ_1 de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array} \right.$$

Sobre una transformación podemos aplicar otra transformación distinta, τ_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = a'x' + b'y' \\ y'' = c'x' + d'y' \end{array} \right.$$

Lo interesante que descubrió Cayley es que la composición de ambas transformaciones, $\tau_2 \circ \tau_1$, que queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = (a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y' \\ y'' = (c'a + d'c)x' + (c'b + d'd)y' \end{array} \right.$$

no es más que una nueva transformación en la que los coeficientes que encontró provienen de una operación entre las matrices de ambas transformaciones.

Así dicho jugamos con cierta ventaja porque ya conocemos la estructura algebraica que poseen las matrices, y la operación que estamos haciendo entre ellas no es más que el producto. Cayley desconocía la aplicación que podían tener y supuso que no serían más que nueva notación. Pero así lo hizo, definió las operaciones entre matrices a partir de los endomorfismos del plano en sí mismo. Es de notar que, al ser la composición de transformaciones una operación no conmutativa, el resultado de definir el producto acorde con la composición obligaba a definir una operación entre matrices como algo que no iba a ser conmutativo.

Con la suma y el producto por un escalar se llegaba a que el conjunto de las matrices con m filas y n columnas tenía estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si éste era un cuerpo; o de módulo, si fuera un anillo. Lo más interesante incluso, trabajando sobre matrices con el mismo número de filas que de columnas, es que se alcanzaba la estructura de *álgebra no conmutativa*.

Pero todo esto no fue hasta 1858, en el que publicó su *Memoria sobre la teoría de Matrices*, puesto que hasta ese momento, y aún con todas las aplicaciones y tratamiento que tenían con las matrices, eran solamente consideradas como notación.

En el mismo artículo estableció la inversa de una matriz, siempre que ésta tuviera determinante no nulo. Para Cayley, la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$$

se obtenía dividiendo entre el determinante cada término de:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{22} & A_{32} & A_{33} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

donde A_{ij} es el cofactor[1] del elemento a_{ij}.

Cuando el determinante es cero, Cayley demostró que la matriz no tenía inversa, sin embargo también afirmó que era posible que el producto de dos matrices fuera cero con que solo una de ellas lo sea. Aquí erró, pues ahora sabemos que para que eso ocurra es necesario que ambas matrices sean iguales a cero (se deja para el lector la demostración como ejercicio.)

3. Álgebra de matrices

Definición 3.1 *Una matriz del tipo (I, J) con elementos en un cierto conjunto $\mathbb{K}$ es una familia $A = (a_{ij})_{(i,j)\in(I,J)}$ de elementos de $\mathbb{K}$ en los que el conjunto de indices es $I \times J \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para cada $i \in I$, la familia $(a_{ij})_{j\in J}$ se llama columna $j-$ésima o de índice j. Para cada $j \in J$ la familia $(a_{ij})_{i\in I}$ se denomina fila $i-$ésima o fila de índice i.*

En todo caso, aunque no hemos explicitado el cardinal de los índices (I, J), en este tema consideraremos finitos a ambos: $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

[1]El menor del elemento a_{ij} se denota como M_{ij} y es el determinante de la matriz que queda después de eliminar la fila i y la columna j de A. El *cofactor* o *adjunto* de a_{ij} se denota como A_{ij} y está dado por la fórmula $A_{ij} = (-1)^{i+j}\text{Det}\ (M_{ij})$. Todos estos conceptos son propios del tema de determinantes y en nuestro caso, en una sección posterior, calcularemos la inversa de una matriz utilizando el método de *eliminación gaussiana* o método de *Gauss-Jordan*.

Podemos encontrarla representada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aunque para nosotros será:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dos matrices A y B son iguales si tienen las mismas filas y columnas y además coinciden en todos sus elementos, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in I$ y $j \in J$.

La diferencia en cuanto al tipo de estructura que tenga el conjunto de las matrices de m filas y n columnas vendrá dada por la estructura que posea el conjunto $\mathbb{K}$. De forma natural nos encontraremos con una estructura de cuerpo, que bien pudiera ser el de los Reales, o el de los Complejos, o también un anillo arbitrario, o el de los enteros, o el de los polinomios, etc.

En cualquier caso, en todo el tema nuestro conjunto $\mathbb{K}$ será básicamente un anillo, al menos conmutativo, y si en algunos momentos necesitamos que sea un cuerpo para añadir resultados propios de espacios vectoriales o de otra índole, lo indicaremos explícitamente.

Las operaciones que vayamos a definir en nuestro espacio de matrices son una extensión de las que ya tuviera $\mathbb{K}$; y por tanto en la mayoría de los casos, las propiedades también.

Denotaremos como $\mathcal{M}_m^n(\mathbb{K})$ al conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{K}$. De la misma forma utilizaremos a conveniencia (a_{ij}) para denotar una matriz cualquiera.

Como casos especiales, si $I = \{1\}$ y $J = \{1, 2, \dots, n\}$ las matrices pueden ser consideradas como *matrices fila*:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_1^n(\mathbb{K})$$

Y si $I = \{1, 2, \dots, m\}$ y $J = \{1\}$, *matrices columna*:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m^1(\mathbb{K})$$

Por último, si $n = m$ las llamamos *matrices cuadradas de orden* n, y escribimos su conjunto como $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En una matriz cuadrada, los elementos a_{ii} se llaman elementos de la *diagonal principal*, y a los a_{in+1-i} los de la *diagonal secundaria*.

A partir de una matriz cualquiera podemos considerar su *matriz traspuesta* en la que intercambiamos las filas por las columnas. Así, si $A = (a_{ij})$, su matriz traspuesta es $A^t = (a_{ji})$, para $i \in I$ y $j \in J$. Lógicamente si $A \in \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K})$ entonces $A^t \in \mathcal{M}_n^m(\mathbb{K})$.

Definición 3.2 *Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir, si* $A = A^t$.

Una matriz es antisimétrica si coincide con la opuesta de su traspuesta, $A = -A^t$. *Esta característica permite afirmar que el rango de una matriz de este tipo es un número par.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *una matriz es hermítica si coincide con la traspuesta conjugada,* $A = \overline{A}$. *La conjugada de una matriz se halla conjugando cada uno de sus elementos.*

También, una matriz es antihermítica si coincide con la opuesta traspuesta conjugada, esto es, $A = -\overline{A}^t$.

3.1. Suma y producto por un escalar

Partimos, como ya hemos dicho, de que $\mathbb{K}$ es un anillo conmutativo. Sobre él tenemos definida la suma y el producto, definiremos a continuación ambas operaciones sobre nuestro espacio de matrices.

Definición 3.3 *Se define la suma de dos matrices de m filas y n columnas como la aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}) \\ & (A \quad , \quad B) & \longmapsto & A + B = C \end{array}$$

donde $C = (c_{ij})$ *es tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo* $i \in I$ *y* $j \in J$.

La estructura contenida en $\mathbb{K}$ se transfiere de alguna forma a $\mathcal{M}_m^n(\mathbb{K})$.

Proposición 3.4 *El conjunto de las matrices con m filas y n columnas sobre un anillo* $\mathbb{K}$ *con la operación suma,* $(\mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}), +)$, *tiene estructura de grupo conmutativo.*

Demostración: Es evidente y puede hacerlo el lector. En primer lugar es una ley de composición interna por la propia definición, pero además se cumplen las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro, opuesto y propiedad conmutativa. Todas se pueden demostrar a partir de la estructura de grupo conmutativo que posee $\mathbb{K}$. El elemento neutro es la *matriz nula*, cuyos elementos son todos 0 (el elemento neutro de la suma en $\mathbb{K}$). Abusando de la notación, a la matriz nula solemos escribirla también como 0.

$\bigotimes$

Podemos introducir la ley de composición externa sobre $\mathbb{K}$.

Definición 3.5 *Se define el producto por un escalar como la aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_m^n(\mathbb{K}) \\ & (\lambda \ , \ A) & \longmapsto & \lambda \cdot A = B \end{array}$$

donde $B = (b_{ij})$ *es tal que* $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ *para todo* $i \in I$ *y* $j \in J$.