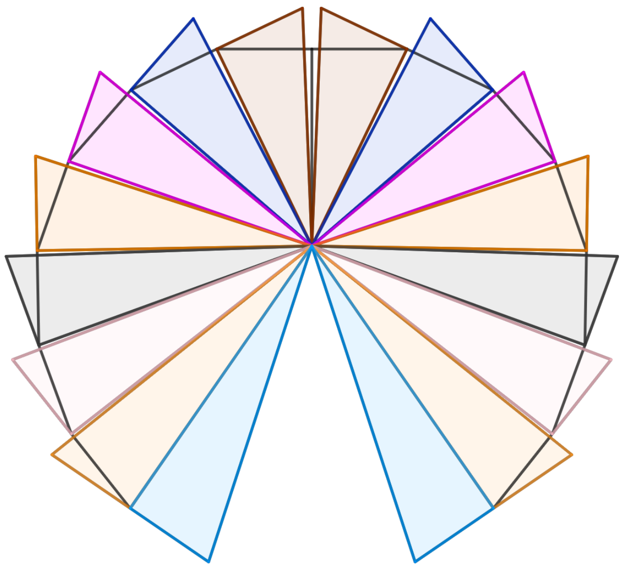
JORGE MORRA

Tema 19. Determinantes. Propiedades. Aplicación al cálculo del rango de una matriz

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 19. Determinantes. Propiedades. Aplicación al cálculo del rango de una matriz



OPOSICIONES
MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el decimonoveno cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de determinantes, propiedades y aplicaciones al rango de una matriz.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este decimonoveno cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, noviembre de 2020

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado algunos sin demostrar. Las demostraciones que se dejan para el lector deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La *introducción* es importante, sitúa a los determinantes dentro de la historia y justifica los resultados que damos a continuación.
- De la sección *determinantes* se tienen que definir las permutaciones y sus propiedades, pues son básicas para la definición del determinante. También es importante la regla de Sarrus, así como las proposiciones que vienen a continuación. Salvo las demostraciones de que el determinante es antisimétrico, es una forma multilineal y es alternada, las restantes pueden omitirse aunque deben enunciarse.
- De la sección *propiedades* deben enunciarse todas y demostrarse solo una de ellas, la que considere el lector. El ejemplo debe introducirse, aunque el lector puede elegir otro de orden 3.
- De la sección *desarrollo por menores complementarios* es necesario el enunciado y demostración del teorema 5.2. El determinante de Vandermonde queda a criterio del lector.
- De la sección *matriz adjunta y matriz inversa* deben introducirse las definiciones y el enunciado y demostración del teorema 6.4.
- La sección *aplicaciones* solo debe mencionarse, sin profundizar en ninguna de ellas.
- De la sección *rango de una matriz* no necesarias todos los conceptos de rango de una matriz, de rango de un homomorfismo y de menor de orden r. También son importante todos los resultados, aunque solamente se debe demostrar el teorema 8.12. El ejemplo, o uno similar, debe introducirse también.

- De la sección *conclusiones* hemos puesto las que hemos considerado, sin embargo esta parte, necesaria al finalizar el tema, queda a expensas del lector.

2. Introducción

Aunque se definen a partir de las matrices, los determinantes no comienzan su andadura hasta después de haberlo hecho éstas. Lo cierto es que a lo largo de la historia han ido apareciendo esporádicamente con unos u otros pueblos. Ya en la antigua China, en los *Nueve capítulos sobre el Arte de las Matemáticas* aparecen las primeras menciones a las matrices aunque nunca se las denominó con ese nombre, y las primeras a los determinantes. Concretamente en el *capítulo* séptimo se da un procedimiento de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que se aplica la *Regla de Cramer*.

Principalmente para resolver sistemas de ecuaciones lineales y con el nombre de *resultante* porque determinante no se asignó hasta años después, Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) introdujo los determinantes en algunos de sus trabajos. Curiosamente algunos años antes un matemático japonés, Seki Kowa (1642-1708), ya había llegado a los mismos resultados que Leibnitz, algo sorprendente porque las matemáticas en Japón no tenían el alcance al que ya habían llegado en occidente.

Algunos años después Colin Maclaurin (1698-1746) elaboró un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes, concretamente la Regla de Cramer, que ya hemos nombrado anteriormente. Aunque estos resultados fueron anteriores a la publicación de Cramer. La notación utilizada por Maclaurin era más farragosa que la de Cramer, lo que implicó que el procedimiento se le llamara finalmente Regla de Cramer. En cualquier caso ni Cramer ni Maclaurin hablaban en su desarrollo de nada parecido a los determinantes.

En años posteriores matemáticos tan importantes como Laplace (1749-1827) o Vandermonde (1735-1796) los incluyeron en algunos de sus trabajos. Concretamente éste último introdujo su famoso determinante en 1772, en su obra *Memoria sobre la resolución de ecuaciones*. No obstante podríamos concretar el origen de la teoría de los determinantes en 1812, en una memoria de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) donde incluso aparecía demostrado el resultado de que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.

Pero Cauchy no desarrolló el determinante utilizando permutaciones, ni tampoco con los menores complementarios, o como luego se denominó *Regla de Laplace*[1], sino que lo hizo con un complicado procedimiento partiendo de n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y utilizando los productos entre ellos y sus diferencias. En cualquier caso el trabajo de 1812 no fue el único en el que utilizó los determinantes, sino que en otros posteriores los usó para resolver problemas geométricos o físicos.

Años después, en 1841 un matemático alemán, Carl Gustav Jakov Jacobi (1804-1851) publicó varios tratados sobre determinantes en los que generalizaba los términos o elementos

[1] En este caso no nos referimos a la conocida regla que afirma que la probabilidad de un suceso puede calcularse con el cociente de los casos favorables entre los casos posibles. En este caso la Regla de Laplace se refiere al desarrollo de un determinante por menores.

permitiendo que fueran funciones además de números y formalizaba el procedimiento algorítmico de su desarrollo. Ese mismo año fue Cayley el que los denotó como ha llegado hasta nuestros días, con dos barras verticales; y en 1958 los utilizó para el cálculo de la matriz inversa.

3. Determinantes

En el desarrollo del tema trabajaremos con dominios, dominios de integridad o con cuerpos. La mayor parte de los resultados puede obtenerse sin exigir mucho al conjunto de escalares al que pertenecerán los elementos de las matrices. Entenderemos por dominio a un anillo conmutativo y unitario, por dominio de integridad a un dominio sin divisores de cero y a un cuerpo como un dominio de integridad que posee inverso para el producto. Para la gran mayoría de los resultados nos limitaremos a trabajar con dominios.

Definición 3.1 *Llamaremos determinante de una matriz cuadrada sobre un dominio* $\mathbb{K}$*,* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, y lo denotaremos como* $\det(A)$ *o bien* $|A|$*, a la expresión:*

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

donde S_n *es el conjunto de las permutaciones*[2] *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *y* $\epsilon(\sigma)$ *es el signo de la permutación.*

También se puede considerar al determinante como una aplicación entre la familia de las matrices y el dominio $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

Comprobaremos más adelante algunas propiedades de esta aplicación. Por el momento es claro que la definición que hemos dado de determinante adolece de la introducción de algunos conceptos previos para su buen entendimiento. Es también justo decir que no suele ser la que se utiliza en la práctica, aunque sí es con la que se comprueban las propiedades con mayor facilidad.

Comencemos pues con la definición de permutación y de signo de una permutación.

3.1. Permutaciones

Sea el conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 3.2 *Llamaremos permutación de* N *a una reordenación cualquiera de los elementos de* N *donde aparecen todos una y solo una vez.*

Suele denotarse como $(1, 2, \ldots, n)$*, ordenados desde el primero al último. Dentro de las posibles permutaciones llamaremos permutación principal a* $(1, 2, \ldots, n)$*.*

[2] En realidad S_n se suele denominar *grupo simétrico de orden* n. Este grupo es el conjunto de aplicaciones biyectivas de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo.

Por ejemplo, si $N = \{1, 2, 3\}$, la permutación principal será $(1, 2, 3)$. Si $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ será $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Denotaremos una permutación cualquiera con la letra σ, y denotaremos también como $\sigma(i) = j$ para decir que el elemento j se encuentra en el lugar i. Así, con $n = 5$ la permutación $p = (2, 3, 1, 5, 4)$ puede escribirse, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 5$ y $\sigma(5) = 4$.

Dada una permutación σ tal que $\sigma(k) = j_k$, puede definirse su inversa, σ^{-1} como $\sigma^{-1}(j_k) = k$. Obviamente

$$(\sigma^{-1} \circ \sigma)(k) = \sigma^{-1}(\sigma(k)) = \sigma^{-1}(j_k) = k$$

Es fácil calcular el número de permutaciones que tiene N, será $n!$. Esto significa que la definición de determinante consta de $n!$ sumandos. Así, un determinante de una matriz de orden 5 tendrá 120 sumandos, y otro de una matriz de orden 3 tendrá 6 sumandos.

Definición 3.3 *Llamaremos trasposición a una permutación que intercambia dos elementos y fija los restantes.*

Por ejemplo, si $n = 4$, la permutación principal será $(1, 2, 3, 4)$ y una trasposición podría ser $(2, 1, 3, 4)$, en el que los elementos 1 y 2 se encuentran intercambiados. También, $(2, 1, 4, 3)$ tiene dos trasposiciones y $(3, 2, 1, 4)$ tiene tres. Conocer el número de trasposiciones puede resultar algo complicado puesto que, sin querer, podemos contar alguna dos veces. Para hacerlo correctamente consideraremos cada elemento y contaremos el número de elementos a la derecha que no se encuentran en el orden correcto. Así, para la cifra 3, tenemos dos trasposiciones, con el 2 y con el 1. Para el elemento 2 solamente una, con el 1. El elemento 1 no tiene trasposiciones y el 4 tampoco. En total tres.

Una propiedad interesante es que cualquier permutación se puede construir como una composición de transposiciones, aunque no de manera única. Dadas dos descomposiciones en transposiciones de una permutación se cumple que ambas usaran un número par o ambas usarán un número impar, eso permite definir de manera unívoca la signatura o signo de una permutación.

Definición 3.4 *Dado $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, y dada una permutación $\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, llamaremos signo de σ y lo denotaremos como $\epsilon(\sigma)$ al número $+1$ si el número de trasposiciones que tiene es par o cero y -1 si es impar.*

Por ejemplo, si $\sigma = (n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1)$, entonces puede comprobarse que el número de trasposiciones es:

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 + 0 = \frac{(n-1)n}{2}$$

lo que implica que:

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Aunque no vamos a demostrarlo, se cumple que una permutación y su inversa tienen el mismo número de trasposiciones. Esto permite afirmar que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$. La prueba puede hacerla el lector, no es nada complicada.

3.2. Definición de determinante

Retomemos la definición.

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

donde $\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$. Por ejemplo, para $n = 1$, es claro que solo existe una permutación posible y $|a| = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$.

Para $n = 2$, el número de permutaciones es 2: $(1, 2)$ y $(2, 1)$, la primera no tiene trasposiciones por tanto tiene signo positivo y la segunda una trasposición, por tanto signo negativo. Así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para orden 3, tenemos seis permutaciones: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ y $(3, 2, 1)$. Tres pares y tres impares.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Este desarrollo se conoce como *Regla de Sarrus*.

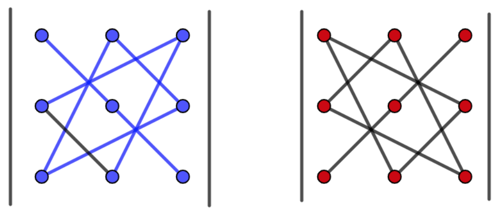


Figura 1: Regla de Sarrus

A continuación iremos obteniendo resultados que en algunos casos podrían considerarse propiedades.

Proposición 3.5 *El determinante de la matriz identidad es* 1.

Demostración: En efecto, se sabe que $I_n = (\delta_{ij})$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

En el desarrollo por sumas del determinante, todas las permutaciones están compuestas por algún elemento que es cero salvo aquella en la que todos los elementos son los de la diagonal principal. Esta permutación es exactamente $(1, 2, \ldots, n)$, cuyo signo es positivo. Por tanto:

$$|I_n| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \delta_{1j_1} \delta_{2j_2} \cdots \delta_{nj_n} = \epsilon(\sigma) \delta_{11} \delta_{22} \ldots \delta_{nn} = \epsilon(\sigma) = 1$$