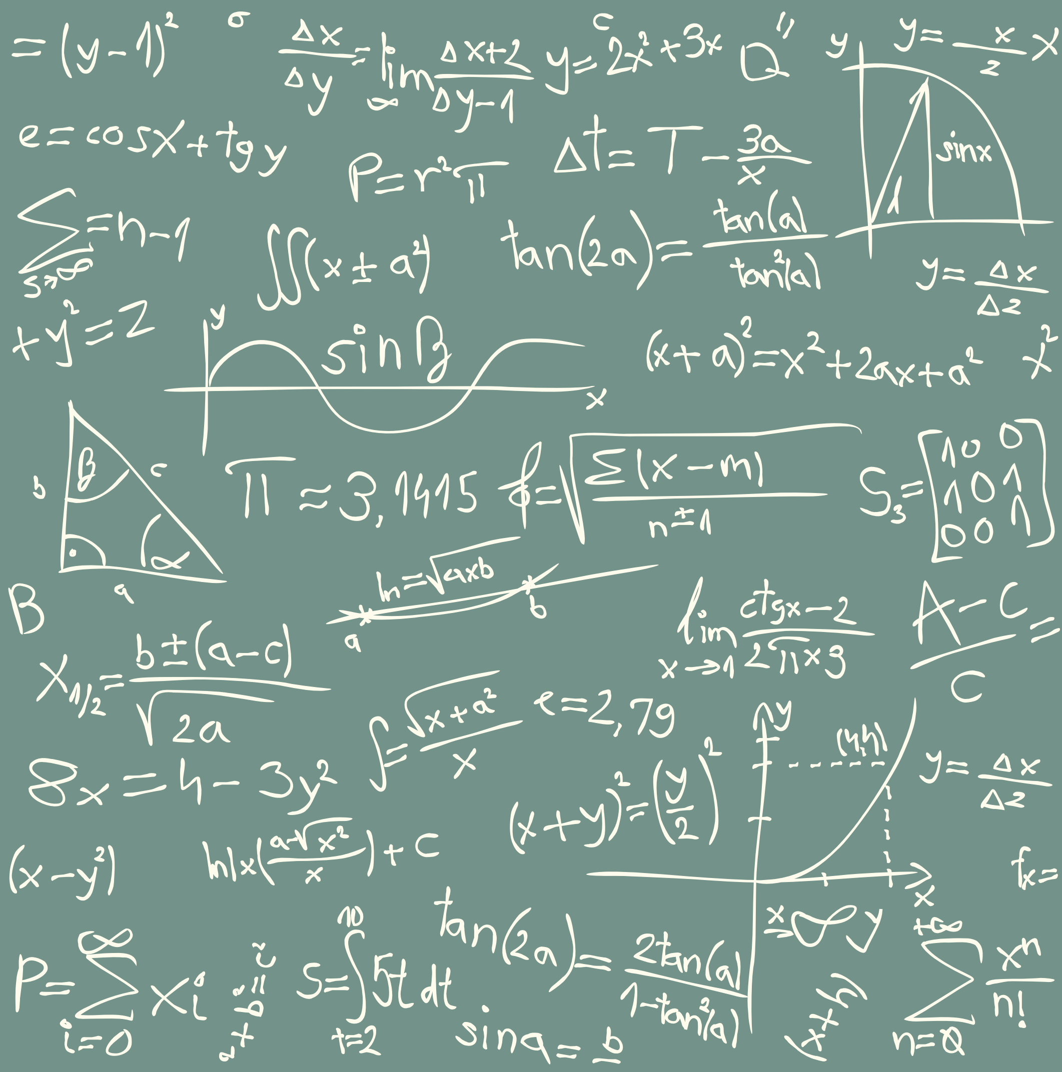
ARITMÉTICA

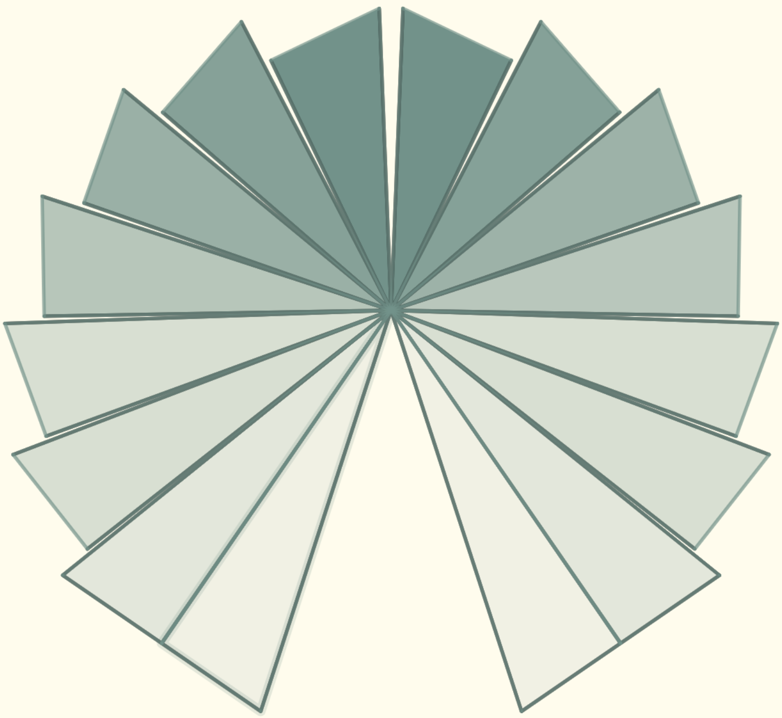
OPOSICIONES MATEMÁTICAS



JORGE MORRA

ARITMÉTICA

OPOSICIONES MATEMÁTICAS



Jorge Morra

autor:Jorge Morra.

Correo Electrónico: jorgemorra@outlook.es

Web/blog: jorgemorra.com

Volumen I: Aritmética (Oposiciones Matemáticas)

Edición en LaTeX y Canva. Febrero 2021

A Belén y Paula, por supuesto

Prólogo

Antes de nada quiero presentarme. Mi nombre es Jorge Sánchez, no Jorge Morra. El sobrenombre o alias "Morra" proviene del ajedrez, deporte del que soy aficionado. Estudié Matemática Fundamental en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Obtuve mi plaza de funcionario hace ya veinte años y desde entonces hasta ahora he venido impartido clases en Secundaria y Bachillerato en diferentes centros del territorio nacional.

Este es el primer volumen de la serie que quiero editar y publicar, y que contiene los diez primeros temas de la oposición de Secundaria en la especialidad de Matemáticas. Concretamente los relacionados con los números.

Debo decir que son *"mis temas"*, los que elaboré y preparé a lo largo de seis largos años (los años de preparación de oposiciones son, por definición, largos), con ayuda de bibliografía propia por una parte y prestada de bibliotecas por otra.

Quiero en este prólogo, dar unas pautas sencillas y claras para enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición. El lector tiene que tener en cuenta algo básico, y es que su tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *"ese algo"* tenga entidad por sí solo. Piense el opositor que el tribunal que nos va a examinar no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *"entretener"* a ese tribunal. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles una historia?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de las Matemáticas y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar. Debido a la cantidad de proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos, será muy difícil que podamos demostrarlos todos; sin embargo es necesario que al menos los expongamos en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Finalmente, en la última acabaremos con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos lo preparemos *a conciencia*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *"A conciencia"* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos. Pero además, si nos toca un tema de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí* lo dominamos, y que si hay partes del tema que no contamos, no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

Cada tema tiene una primera sección denominada "*¿Cómo preparar este tema?*". En dicha sección propongo un estudio concreto de éste, en el que doy prioridad a unos contenidos sobre otros. Esta parte no pretende sustituir a un preparador, pero mi intención es que ayude al opositor en el desarrollo del tema.

Es claro que el sistema de oposición permite no tener que prepararse todo el temario al completo, lo que implica que el opositor puede *elegir* aquellos temas que mejor le parezcan. Me gustaría recalcar que, cuando haya elegido uno concreto, lea éste y lo entienda al completo, desde la primera hasta la última línea. Esto es algo que parece incuestionable, pero lo digo porque en ocasiones tendemos a saltarnos parte de un texto al considerarlo poco importante, o al creer que lo conocemos. En este caso le pido que no lo haga.

También quiero que tenga claro que lo que le propongo en la sección de cómo preparar el tema es lo que debería desarrollar. No obstante, si puede escribir más, tendrá que añadir más y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema, todo a su criterio.

También me gustaría mencionar algo importante. Existe una tendencia general a que cada definición o proposición tiene que tener asociado algún ejemplo que ”verifique” de alguna forma lo que acabamos de enunciar. No puedo hablar por todos los tribunales de oposición, pero sí puedo decir que yo, como profesor de Matemáticas y como posible miembro de tribunal, primo los conceptos y los resultados antes que los ejemplos. A mí me interesa saber si el opositor conoce el tema del que está hablando y el conocimiento de ejemplos no demuestra que lo sepa. Esto no quiere decir que no se ejemplifique lo que expongamos, puesto que los ejemplos son los que clarifican los contenidos; pero, insisto, tenemos que hacerlo en la justa medida, sin excedernos.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este primer volumen sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es; si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, febrero de 2021

Índice general

Índice de figuras

Tema 1

Números naturales. Sistemas de numeración

1.1. ¿Cómo preparar este tema?

Mi propuesta:

- La ”Introducción” es muy importante, es la que da concreción al tema y debe ser al completo. Es necesario justificar lo que expondrá a continuación.
- Del punto de ”Los Naturales según Peano”, enumere los 5 axiomas, enuncie y demuestre el teorema 2.4.4, enuncie solamente las propiedades de la adición: asociativa y conmutativa. Del producto haga lo mismo, defina la operación y demuestre su existencia y unicidad, después nombre solamente sus propiedades. Sobre el ”Orden” formule los lemas previos y enuncie y demuestre el teorema 2.5.11. El teorema que clasifica todos los conjuntos de Peano también se enuncia y demuestra, tenga en cuenta que es la justificación de la definición de $\mathbb{N}$.
- Del punto ”Sistemas de Numeración” justifique su existencia y las características que deben tener. La Regla de la División y otros resultados pueden enunciarse solamente. De la sección ”Teorema Fundamental de la Numeración” es importante enunciar y demostrar dicho teorema, aunque solo se formulen los lemas previos. Por último, sobre las propiedades de los Sistemas de Numeración, enúncielas el lector y demuestre 2.6.3. Finalmente ponga algunos ejemplos de cambios de sistema.

1.2. Introducción

Los Números Naturales surgen por la necesidad del hombre de *”contar”* cantidades. Este hecho, tan obvio y tan evidente para generaciones futuras, supuso no pocos quebraderos de cabeza hace 10000 años. En un primer momento la forma de contar se limitaba a marcar en palos, piedras o huesos, señales que permitieran conocer el número que se deseaba conocer; y aunque fue afianzándose a lo largo del tiempo, no fue hasta prácticamente el siglo XIX, con Dedekind primero, y Peano, Frege y Russell después, cuando se fijó definitivamente cómo debía ser el conjunto de los Números Naturales, y cuáles eran las operaciones que se podían realizar con ellos. Su construcción se puede ver de tres formas distintas:

Desde el punto de vista axiomático de Peano: esto es, estableciendo un número de axiomas y a partir de ellos probar una serie de teoremas que no son otra cosas que sus propiedades. Este método, publicado por Giuseppe Peano en sus famosos cinco postulados, comienza con Dedekind y es seguido después por Hilbert. Será el que utilicemos en el desarrollo de este tema. Podemos también encontrarlo en [6]

Desde el punto de vista axiomático de Lawvere: es decir, a partir de la introducción de lo que William Lawvere denominó *Categorías*. No vamos a introducirnos en este concepto, a partir del cual podríamos axiomatizar la Aritmética, y podemos profundizar más en [46].

A través del cálculo de clases de equivalencia obtenidas por la Relación de coordinabilidad entre conjuntos, que comenzó Cantor, y prosiguió con Frege y Russell.

1.3. Los Naturales según Peano

En 1889 Peano introduce un sistema de cinco principios para construir el Conjunto de los Números Naturales. Entre estos cinco postulados se encuentra la piedra angular de su construcción, que es la introducción del *"siguiente"* de un número.

Definición 1.3.1 *Diremos que $\mathcal{N}$ es un conjunto de Peano si cumple los siguientes axiomas:*

Axioma 1: *Existe un elemento, que denominaremos 1, que pertenece a $\mathcal{N}$, es decir, $1 \in \mathcal{N}$. A dicho elemento se le denominará comunmente el primer elemento de $\mathcal{N}$*

Axioma 2: *Para cada elemento a de $\mathcal{N}$ existe el siguiente de a, de tal forma que si dos elementos son iguales, sus siguientes también. Esto es: $\forall a \in N$ existe $S(a) \in \mathcal{N}$ de tal forma que si $a = b$ entonces $S(a) = S(b)$.*

Como ya se ha especificado antes al elemento $S(a)$ se le denomina "Siguiente" de a. Podríamos considerar a "S" como una aplicación de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{N}$.

Axioma 3: *Para cada $a \in \mathcal{N}$ se tiene que $S(a) \neq 1$, esto es, no es posible que el siguiente de ningún elemento de $\mathcal{N}$ sea el 1.*

Axioma 4 : *Para cada $a, b \in \mathcal{N}$, si $S(a) = S(b)$ entonces $a = b$.*

Este axioma exige inyectividad a la aplicación "Siguiente".

Axioma 5: Axioma de Inducción Matemática. *Este quinto postulado es el más potente de los cinco; viene a decir que:*

"Todo conjunto de números naturales que contenga al 1 y que para cada uno de sus elementos contenga también a su siguiente, entonces contiene a todos los Naturales."

Esto es, $\forall K \subset \mathcal{N}$ tal que

- $1 \in K$
- *$\forall a \in \mathcal{N}$ se tiene $S(a) \in K$*

entonces se cumple que $K = \mathcal{N}$

La base de la construcción de los Números Naturales se encuentra en los cinco axiomas antes señalados. Si bien es cierto que no todo es tan trivial; aún nos queda mucho que recorrer y muchos resultados que probar antes de llegar finalmente a reconocer a $\mathbb{N}$ como el final del camino.

Partiremos reconociendo la existencia de un conjunto $\mathcal{N}$ que llamaremos Conjunto de Peano, sobre el que definiremos previamente dos operaciones, a la sazón *adición* y *producto* y después un orden que resultará compatible con ambas operaciones.

1.3.1. Adición o suma en $\mathcal{N}$

Para incorporar la suma en nuestro conjunto de Peano vamos a considerar una función que tenga las propiedades que queremos que tenga la *suma*. Comprobaremos a continuación que dicha función existe y además que es única.

Sea por tanto:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

una función tal que cumple:

- $f(x,1) = S(x)$
- $f(x,S(y)) = S(f(x,y))$

Teorema 1.3.2 *La función f antes definida existe y es única.*

Demostración.

a) *Existencia de f*

Sea $M = \{x \in \mathcal{N}$ tal que $\exists f_x : \{x\} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}\}$ y tal que f_x cumple las condiciones

I) $f_x(x,1) = S(x)$

II) $f_x(x,S(y)) = S(f_x(x,y))$

El conjunto M así definido está formado por elementos de $\mathcal{N}$ y pretendemos demostrar que $M = \mathcal{N}$.

Para conseguirlo utilizaremos el quinto postulado, el *Axioma de Inducción Matemática.* Lo primero será ver que el elemento 1 se encuentra dentro de M, y después que si un elemento x es de M, entonces también lo es su siguiente, $S(x)$.

- Sea $f_1 : \{1\} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, con $f_1(1,y) =: S(y)$.

  Es claro que está bien definida y además $f_1(1,1) = S(1)$, por lo que se deduce (aI).

Por otra parte $f_1(1, S(y)) = S(S(y)) = S(f_1(1, y))$, y consecuentemente se deduce también (aII).

De los resultados anteriores podemos concluir que $1 \in M$

- Suponiendo ahora que $x \in M$ queremos demostrar que $S(x) \in M$.

  Sabemos por hipótesis que existe f_x con las condiciones (aI) y (aII).

  Definamos
  $$f_{S(x)}(S(x), y) := S(f_x(x, y))$$
  Ahora tenemos que comprobar que está bien definida, y que cumple con las dos condiciones para que $S(x)$ sea un elemento de M.

  - Por una parte, ya que $f_x(x, 1) = S(x)$ es evidente que $f_{S(x)}(S(x), 1) = S(f_x(x, 1)) = S(S(x))$.
  - Y por otra $f_{S(x)}(S(x), S(y)) = S(f_x(x, S(y))) = S(S(f_x(x, y))) = S(f_{S(x)}(S(x), y))$.

  Esto implica que $f_{S(x)}$ cumple (aI) y (aII), y por tanto $S(x) \in M$.

Aplicando el *Axioma de Inducción Matemática* se concluye que $M = \mathbb{N}$

b) *Unicidad de f.*

Para la unicidad tomemos dos aplicaciones distintas f y g que cumplan las condiciones (aI) y (aII); veremos que dichas aplicaciones son iguales.

Lógicamente y como será habitual a lo largo de prácticamente todo el tema, utilizaremos el *Axioma de Inducción* para demostrarlo.

Sean por tanto f y g:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (x, y) & \longmapsto & g(x, y) \end{array}$$

Con las condiciones:

I) $f(x, 1) = S(x)$ | I) $g(x, 1) = S(x)$

II) $f(x, S(y)) = S(f(x, y))$ | II) $g(x, S(y)) = S(g(x, y))$

Sea, para cada $x \in \mathbb{N}$ el conjunto $M_x = \{y \in \mathbb{N} : f(x, y) = g(x, y)\}$. Vamos a demostrar que $M_x = \mathbb{N}$. Obviamente por inducción.

- Como $f(x, 1) = S(x) = g(x, 1)$ se cumple que $1 \in M_x$
- Sea $y \in M_x$, lo que implica que $f(x, y) = g(x, y)$; y como
  $$f(x, S(y)) = S(f(x, y)) = S(g(x, y)) = g(x, S(y))$$
  resulta que $S(y) \in M_x$. En definitiva $M_x = \mathbb{N}$

Con lo que para cada $x \in \mathcal{N}$ y para cada $y \in \mathcal{N}$ obtenemos $f(x,y) = g(x,y)$, lo que conlleva la unicidad en f.

$\otimes$

Llamaremos *adición* a ésta función y la denotaremos como sigue:

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

Cuyas dos características básicas son:

$$+(x,1) = S(x) = x+1 \tag{1.3.1}$$

$$x + (y+1) = x + S(y) = +(x, S(y)) = S(+(x,y)) = (x+y)+1 \tag{1.3.2}$$

Propiedades de la adición de elementos de un conjunto de Peano

Como es de esperar, la propiedades que vamos a estudiar a continuación son las propias de los Números Naturales, es decir, la Asociativa y la Conmutativa. Dichas propiedades conferirán a $\mathbb{N}$ con la operación adición estructura de Semigrupo Abeliano.

Recordemos antes que nada las condiciones que se deben cumplir para que una operación verifique ambas propiedades.

Dado un conjunto cualquiera en el que tenemos definida una ley de composición interna, $(\mathcal{A}, \odot)$, la *Propiedad Asociativa* afirma que dados tres elementos cualquiera, $a, b, c \in \mathcal{A}$ se cumple

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

Cuando esto ocurre podemos ”ahorrarnos” los paréntesis:

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c) = a \odot b \odot c$$

Análogamente con la misma estructura $(\mathcal{A}, \odot)$, dados dos elementos $a, b \in \mathcal{A}$, la *Propiedad Conmutativa* dice que:

$$a \odot b = b \odot a$$

.

Proposición 1.3.3 *La operación "+" antes definida sobre $\mathcal{N}$ verifica la propiedad Asociativa.*

Demostración: En efecto, consideremos dos elementos $a, b \in \mathcal{N}$, y sea $M = \{x \in \mathcal{N} : (a+b)+x = a+(b+x)\}$. Demostraremos (nuevamente por Inducción), que $M = \mathcal{N}$.

- Se tiene, por (1.3.1) y (1.3.2) que $(a+b)+1 = S(a+b) = a+S(b) = a+(b+1)$, con lo que $1 \in M$.
- Por otra parte, tomemos $x \in M$. Nuevamente por (1.3.1) y (1.3.2) obtenemos que $(a+b)+S(x) = S((a+b)+x) = S(a+(b+x)) = a+S(b+x) = a+(b+S(x))$. Esto conlleva que $S(x) \in M$

Por tanto, aplicando el *Axioma de Inducción* llegamos a que $M = \mathcal{N}$

$\otimes$

Para la demostración de la conmutatividad necesitamos un lema previo.

Lema 1.3.4 *Para cada elemento* $x \in \mathcal{N}$ *se tiene que* $x + 1 = 1 + x$

Demostración: Sea $M = \{x \in \mathcal{N} : x+1 = 1+x\}$, comprobaremos de nuevo por inducción que $M = \mathcal{N}$.

- Obviamente $1 + 1 = 1 + 1$, lo que lleva a que $1 \in M$.
- Supongamos que $x \in M$, aplicando además la propiedad asociativa tenemos entonces que $S(x)+1 = (x+1)+1 = (1+x)+1 = 1+(x+1) = 1+S(x)$. Por tanto $S(x) \in M$

Aplicando la inducción llegamos a $M = \mathcal{N}$

$\otimes$

Proposición 1.3.5 *La operación* $''+''$ *antes definida sobre* $\mathcal{N}$ *verifica la propiedad Conmutativa.*

Demostración: Dado $y \in \mathcal{N}$ definimos $M_y = \{x \in \mathcal{N} : x + y = y + x\}$.

- Aplicando el lema anterior $1 + y = y + 1$, con lo que $1 \in M$
- Tomemos ahora $x \in M_y$. Utilizando el lema, y la propiedad asociativa ya demostrada se tiene que

$$\begin{aligned} S(x) + y &= (x + 1) + y = (1 + x) + y = \\ &= 1 + (x + y) = 1 + (y + x) = \\ &= (1 + y) + x = (y + 1) + x = \\ &= y + (1 + x) = y + (x + 1) = \\ &= y + S(x) \end{aligned}$$

  Con lo que $S(x) \in M_y$.

Y por ello $M_y = \mathcal{N}$. Como este elemento y era arbitrario, concluimos que para todo $x, y \in \mathcal{N}$ se cumple $x + y = y + x$

$\otimes$

Corolario 1.3.6 *El sistema algebraico* $(\mathcal{N}, +)$ *tiene estructura de semigrupo abeliano.*

Este corolario induce sobre nuestro conjunto de Peano una estructura de semigrupo conmutativo con la operación adición; sin embargo sobre $\mathcal{N}$ también podemos introducir una nueva operación denominada producto, que además de ser una ley de composición interna cumple también la propiedad Asociativa, la propiedad Conmutativa, y además se le añade la existencia de Elemento Neutro.

Con las propiedades Asociativa y existencia de Elemento Neutro, $\mathcal{N}$ tendría una nueva estructura de *Monoide*; y si además le añadimos la Conmutativa entonces sería un *Monoide Conmutativo* o *Abeliano*.

1.3.2. Producto en $\mathcal{N}$

La definición del producto de dos elementos de $\mathcal{N}$ se va a definir de forma análoga a como se hizo con la suma.

Sea por tanto:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{N}\times\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) \end{array}$$

una función que cumple:

- $g(x,1) = x$
- $g(x,S(y)) = g(x,y) + x$ (siendo " + " la adición en $\mathcal{N}$).

Proposición 1.3.7 *La función g antes definida existe y es única.*

Demostración: Sea $M = \{x \in \mathcal{N} \text{ tal que } \exists g_x : \{x\} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}\}$ con las condiciones siguientes:

I) $g_x(x,1) = x$

II) $g_x(x,S(y)) = g_x(x,y) + x$

Utilizaremos como viene siendo habitual el *Axioma de Inducción.*

- Definimos $g_1 : \{1\} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ para cada $y \in \mathcal{N}$ como $g_1(1,y) := y$.

  Es trivial comprobar que $g_1(1,1) = 1$ y que $g_1(1,S(y)) = S(y) = S(g_1(1,y)) = g_1(1,y) + 1$. Lo que conlleva que $1 \in M$.

- Supongamos ahora que $x \in M$, entonces existe una cierta g_x con las condiciones (I) y (II). Definimos ahora

  $$g_{S(x)} : \{S(x)\} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$

  de la forma

  $$g_{S(x)}(S(x),y) := g_x(x,y) + y$$

  Ahora tenemos que $g_{S(x)}(S(x),1) = g_x(x,1) + 1 = x + 1 = S(x)$, lo que verifica (I).

  Además

  $$\begin{aligned} g_{S(x)}(S(x),S(y)) &= g_x(x,S(y)) + S(y) = g_x(x,y) + x + S(y) = \\ &= g_x(x,y) + x + (y+1) = g_x(x,y) + (x+y) + 1 = \\ &= g_x(x,y) + (y+x) + 1 = g_x(x,y) + y + (x+1) = \\ &= g_x(x,y) + y + S(x) = g_{S(x)}(S(x),y) + S(x) \end{aligned}$$

  Por tanto $S(x) \in M$

Y con ello $M = \mathcal{N}$

Para acabar demostrando su existencia solo queda definirla. Sea por tanto:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{N}\times\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) := g_x(x,y) \end{array}$$

Esta función, g, cumple las dos condiciones pedidas. Ayudándonos de g_x se puede comprobar sin dificultad que:

I) $g(x,1) = g_x(x,1) = x$

II) $g(x,S(y)) = g_x(x,S(y)) = g_x(x,y) + x = g(x,y) + x$

De esta forma queda demostrada su existencia. El siguiente paso es su unicidad.

Supongamos ahora que tenemos dos funciones g, h tales que:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) \end{array}$$

I) $g(x,1) = x$

II) $g(x,S(y)) = g(x,y) + x$

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) \end{array}$$

I) $h(x,1) = x$

II) $h(x,S(y)) = h(x,y) + x$

Dado $x \in \mathcal{N}$, sea $M_x = \{y \in \mathcal{N} : g(x,y) = h(x,y)\}$. Nuevamente utilizaremos la Inducción Matemática para demostrar que $M_x = \mathcal{N}$.

- $g(x,1) = x = h(x,1)$, entonces $1 \in M_x$
- Dado $y \in M_x$, tenemos que $g(x,S(y)) = g(x,y)+x = h(x,y)+x = h(x,S(y))$, luego $S(y) \in M_x$

Por tanto, para cada $x \in \mathcal{N}$ se tiene que $M_x = \mathcal{N}$

A partir de este momento, y una vez que tenemos bien definido un producto de elementos de un conjunto de Peano, la notación que utilizaremos será la que se utiliza habitualmente en $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) := x \cdot y \end{array}$$

Propiedades del producto

Al igual que con la adición, el producto de elementos de un conjunto de Peano verifica las siguientes propiedades:

a) Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

b) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

c) Elemento Neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

d) Distributiva del producto con respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, aunque se suele escribir sin paréntesis.

Las demostraciones de estas propiedades se dejan como ejercicio. Basta considerar los conjuntos convenientes en cada una de ellas y demostrar por inducción que son iguales a $\mathcal{N}$.

1.3.3. Orden en $\mathcal{N}$

En esta parte del tema introduciremos el orden en nuestro conjunto de Peano. Tenemos que tener en cuenta que tanto las operaciones definidas hasta ahora como la relación de orden que vamos a establecer a continuación son características esenciales del conjunto de los Números Naturales. Prácticamente todas las demostraciones que hemos visto y que veremos a continuación en toda la parte relativa a la construcción de $\mathbb{N}$, se realizan utilizando el 5º axioma, el *"Axioma de Inducción Matemática"*.

Necesitamos tres lemas previos antes de definir la relación de orden.

El primero de los lemas revela la existencia del *anterior* de cualquier elemento salvo del primero.

El segundo nos dice algo aparentemente obvio, pero que cuando estamos trabajando con Lógicas de Segundo Orden[1], como es el caso de los Axiomas de Peano, es necesario demostrar. Este lema afirma que un elemento no puede ser igual a su siguiente.

Con el tercero veremos que la suma de dos elementos nunca puede ser igual a uno de ellos. Sobre este lema debemos pensar en que nuestro primer elemento de Peano es el 1, y no el 0 como podemos encontrar en algunos textos. Lo cierto es que suponer al 0 como el primer elemento natural no modifica en nada todo el desarrollo conceptual del tema, sin embargo es cierto que si se quisiera incluir necesitariamos *"remodelar"* prácticamente todos los resultados y definiciones.

Lema 1.3.8 *Para todo $b \in \mathcal{N}$, $b \neq 1$ se tiene que $\exists! a \in \mathcal{N}$ tal que $S(a) = b$. Este elemento recibe el nombre de "*anterior*" de b.*

Demostración: En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que $\exists x_o \in \mathcal{N}$, $x_o \neq 1$ tal que no tiene anterior. Por consiguiente estamos partiendo de que para todo $y \in \mathcal{N}$, se cumple $S(y) \neq x_o$.

Consideramos $M = \{y \in \mathcal{N} : y \neq x_o, S(y) \neq x_o\}$. Comprobaremos que $M = \mathcal{N}$.

- Como $1 \neq x_o$ y $S(1) \neq x_o$ es obvio que $1 \in M$
- Tambien, si $y \in M$ se tiene por una parte que $y \neq x$, y por otra que $S(y) \neq x$, pero también por la hipótesis de reducción al absurdo, $S(S(y)) \neq x$, lo que conlleva necesariamente que $S(y) \in M$.

Por tanto, $M = \mathcal{N}$.

Piénsese ahora un cierto $x \in \mathcal{N}$, que verificará lógicamente $x \in M$, y con ello $x \neq x$, ya que ésta es una de las condiciones de partida del conjunto M. Hemos llegado a una incoherencia que demuestra que la hipótesis original no puede ser cierta, y con ello todo elemento tiene que tener al menos un anterior.

Supongamos por último que tuviéramos un x_o con dos anteriores y_1, y_2, es decir, $S(y_1) = x = S(y_2)$, pero por la inyectividad de S, necesariamente $y_1 = y_2$.

[1] Básicamente una Lógica de Segundo Orden es una Lógica de Primer Orden a la que hemos añadido Cuantificadores. No voy a hacer más hincapié en las Lógicas porque no creo que sean esenciales en el desarrollo de este tema.

$\otimes$

Lema 1.3.9 *Ningún elemento puede coincidir con su siguiente.*

Demostración: Básicamente tenemos que demostrar que para cada $x \in \mathbb{N}$, $S(x) \neq x$.

Sea $M = \{x \in \mathbb{N} : x \neq S(x)\}$. Si demostramos que $M = \mathbb{N}$ habremos demostrado el lema.

En efecto:

- Como para todo $x \in \mathbb{N}$, $1 \neq S(x)$ se tiene $1 \in M$
- Tomemos $x \in M$, entonces $x \neq S(x)$; ahora bien, si $S(x) = S(S(x))$ entonces por la inyectividad de S obtenemos que $x = S(x)$ lo que es absurdo pues $x \in M$. Por consiguiente $S(x) \neq S(S(x))$ y con ello $S(x) \in M$

En resumidas cuentas, volviendo a aplicar la *"Inducción Matemática"* llegamos a $M = \mathbb{N}$

$\otimes$

Lema 1.3.10 *Para cada $x, y \in \mathbb{N}$ se cumple que $x + y \neq x$.*

Demostración: Tomemos un cierto y cualquiera de $\mathbb{N}$, y sea ahora el conjunto $M_y = \{x \in \mathbb{N} : x + y \neq x\}$. Vamos a comprobar que $M_y = \mathbb{N}$.

- Como $1 + y = S(y) \neq 1$ se tiene que $1 \in M_y$
- Tomemos $x \in M_y$. Utilizando las propiedades de asociatividad y conmutatividad ya demostradas es fácil ver que:

$$S(x) + y = (x + 1) + y = x + (1 + y) = x + (y + 1) = (x + y) + 1 = S(x + y)$$

  Ahora bien, como $x \in M_y$ se tiene $x + y \neq x$ y con ello $S(x + y) \neq S(x)$, lo que demuestra que $S(x) + y \neq S(x)$, y con ello $S(x) \in M_y$

Definitivamente por inducción se llega a que para cada $y \in \mathbb{N}$ es $M_y = \mathbb{N}$, lo que demuestra el lema.

$\otimes$

A partir de los lemas precedentes ya podemos introducir un orden en nuestro conjunto de Peano. Dicho orden viene también precedido de un teorema que realiza una partición en $\mathbb{N}$, *"ordenando"* los elementos que anteceden y suceden a uno dado.

Teorema 1.3.11 *Sea $x \in \mathbb{N}$. Los conjuntos:*

- $I_x = \{x\}$
- $m_x = \{y \in \mathbb{N} : \exists u \in \mathbb{N} \text{ con } y + u = x\}$
- $M_x = \{y \in \mathbb{N} : \exists v \in \mathbb{N} \text{ con } x + v = y\}$

forman una partición disjunta de $\mathbb{N}$

Demostración: Llamaremos $P = m_x \cup I_x \cup M_x$. Vamos a demostrar nuevamente por inducción que $P = \mathbb{N}$.