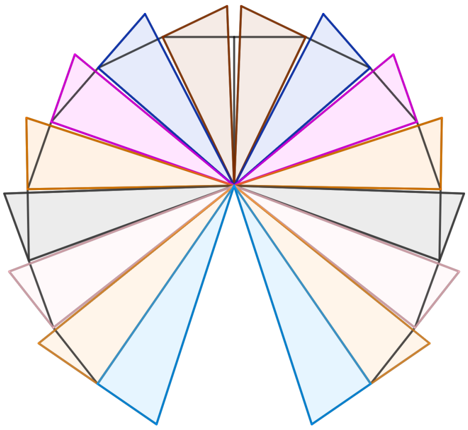
JORGE MORRA

Tema 7. Aproximación de números. Errores. Notación científica

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 7. Aproximación de números. Errores. Notación científica



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el séptimo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de aproximación de números, errores y notación científica.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este séptimo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, febrero de 2021

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado algunos sin demostrar. Las demostraciones que se dejan para el lector deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La *introducción* es importante, situa el tema dentro del contexto en el que encontramos a los errores y diferencia las dos partes en la que vamos a desarrollarlo. La primera trata sobre el error visto desde la *aproximación*, más relacionado con los métodos numéricos, aunque sin ahondar en ellos (el ejemplo que aparece es muy interesante y también debe estudiarse); y la segunda, mucho más teórica, introduciendo la teoría clásica del error.

- La parte de *aproximación numérica* y *errores* debe estudiarse al completo. Esto incluye el truncamiento y el redondeo, así como los ejemplos que se incluyen.

- De la parte de *notación científica y cifras significativas*, son importantes las definiciones y las operaciones con números en notación científica. También debe definirse y poner ejemplos del concepto de *cifras significativas.*

- La parte de la *teoría del error* junto con las restantes secciones son las más interesantes del tema; las que profundizan en conceptos y resultados con una aplicación más teórica en las ciencias experimentales. Deben diferenciarse los tipos de errores que se cometen. Además se deben incluir los postulados de Gauss y su consecuencia sobre el estudio de los errores en una medición. El desarrollo de la función de densidad de la curva normal es opcional, puede el lector estudiarlo o no, se deja a su elección. En cualquier caso, sí debe mencionarse la curva normal y lo que representa. También justificar el porqué de la media, de la varianza y de la desviación típica en una medición.

- De la parte de *precisión y exactitud de una medida* es necesario definir ambos conceptos, y luego desarrollar cómo se aplican en el cálculo de una magnitud. También la definición de la *función error de Gauss* y los dos resultados que se incluyen. Es necesario interpretar matemáticamente el valor de la variable k y su relación con la varianza.

- De la parte *propagación del error* deben estudiarse las fórmulas de la varianza que aparecen e incluir en el estudio uno o dos ejemplos, éstos a discreción del lector.

2. Introducción

El error cuando se trabaja con Matemática Aplicada es algo que los matemáticos e ingenieros asumen habitualmente. Se desconocen las infinitas cifras decimales de números tan importantes como π o e, lo que implica que siempre que realicemos cálculos con dichos números necesitamos utilizar aproximaciones suyas. Se deduce de ello que, aunque sepamos a priori que los resultados obtenidos no serán exactos, necesitamos cuantificar de algún modo el error cometido con la aproximación tomada. Por otra parte, los errores que pueden cometerse, además de los previamente admitidos, pueden provenir de las mediciones de las magnitudes de los objetos, que estarán relacionados con los utensilios de medida o con el equipo (humano) que realiza la medida. Sabemos además que en idénticas condiciones y siguiendo el mismo procedimiento no se obtienen las mismas medidas en momentos distintos.

Estos problemas se resuelven en parte con la introducción de los conocidos *métodos numéricos*. Éstos pueden considerarse procedimientos matemáticos, cuyo objetivo es encontrar una aproximación que se ajuste a un límite de error previamente determinado. Tenemos que dejar claro que los métodos numéricos no permiten alcanzar una solución real del problema, sino solamente una aproximación.

En general en este tipo de procesos, el error total se limita controlando los errores parciales cometidos en cada paso del proceso. Un ejemplo de ello es la utilización del polinomio de Taylor para conocer el valor de una función en un punto.

Pongamos un ejemplo sencillo sobre logaritmos. Para ello vamos a enunciar un teorema que *aproxima* los logaritmos por polinomios. Solo vamos a enunciarlo, no a demostrarlo, pues no forma parte del desarrollo del tema.

Teorema 2.1 *Para cada $x \in (0,1)$ y para cada $n \geqslant 1$ se tiene que*

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{2}R_n(x)$$

donde $R_n(x)$ es el error y puede ser acotado en la forma

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} < R_n(x) \leqslant \frac{(2-x)x^{2n+1}}{(1-x)(2n+1)}$$

La fórmula y la restricción del error nos permite el cálculo del logaritmo que queramos con muy pocos cálculos, y lo que es más importante, con el grado de aproximación que queramos.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular $\ln(3)$. Como $\ln(\sqrt{u}) = \frac{1}{2}\ln(u)$, tomamos x, tal que

$$\frac{1+x}{1-x} = 3$$

resultando $x = 1/2$. Por consiguiente para $n = 3$ por ejemplo:

$$\frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{5} + \frac{1}{2}R_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

De lo que se deduce que

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{5}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

Efectuando los cálculos:

$$\ln 3 = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{263}{240} + R_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por el teorema anterior conocemos la *cota* del error,

$$\frac{(1/2)^7}{7} < R_3\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{(2-1/2)(1/2)^7}{(1/2)\cdot 7}$$

esto es

$$\frac{1}{896} < R_3\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{3/256}{7/2}$$

y finalmente

$$0,00112 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0,0033$$

lo que implica que si tomamos como aproximación del logaritmo neperiano de 3 el valor $\frac{263}{240}$, serán exactas al menos sus dos primeras cifras decimales.

Con la aparición de los ordenadores, aumenta la celeridad de cálculos como el anterior. No obstante, debemos añadir que la creación de métodos numéricos no es algo propio del siglo XX, sino de mucho antes.

Procedimientos como la interpolación lineal para aproximar valores intermedios se utilizaban comunmente en la antigua Babilonia e incluso en culturas posteriores. Para los babilonios, de hecho, aceptaban de buen grado soluciones aproximadas de números irracionales en sus ecuaciones cuadráticas. La *Regula Falsi* se utilizaba en el antiguo Egipto o en la antigua China; o el procedimiento de *exhaución* de Arquímedes en su aproximación[1] a π, que recordemos que por medio de triángulos, cuadrados, pentágonos, etc, llegó a hacerlo acotándolo entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$. En la actualidad se conocen billones decimales de π, sí, billones, si bien en la mayoría de los cálculos en los que interviene este conocido número, no son necesarios muchos más que su primera decena.

[1] Ya se sabía, y había aparecido en los libros de Euclides, que existía una razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, pero se desconocía cuál era dicha razón

Los métodos de la tangente o de la cuerda resuelven ecuaciones utilizando iteracciones. En cada una se consigue una aproximación mayor a la solución y por tanto una disminución del error. La importancia de dichos métodos y de su aplicación se basa en la restricción que consigamos de éste.

Por otra parte, la introducción de la interpolación polinómica va a permitir el cálculo aproximado del valor de una función f en los valores que se desee. La idea es, partiendo de f y de unos elementos concretos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *sustituir* f por un polinomio p de grado menor o igual que n, tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots n$. Una vez que tengamos calculado el polinomio el objetivo será hallar aproximaciones de otros valores minimizando todo lo que se pueda el error cometido.

De todas formas, nuestro objetivo a lo largo del tema no serán los métodos numéricos nombrados hasta ahora. Hemos hecho solamente una mención a algunos procedimientos que permiten la aproximación de números, o en el caso de la interpolación polinómica, de funciones. Nosotros nos centraremos en el estudio del error cometido al aproximar un valor, y de la propagación del error.

3. Aproximación numérica. Errores

Como ya hemos dicho, en las ciencias experimentales y en matemática aplicada nos encontramos con valores numéricos con los que no es posible operar convenientemente. Las razones son básicamente dos: o bien se desconocen las infinitas cifras decimales que tienen, o bien se desconoce su valor real pues éste proviene de la experimentación.

Definición 3.1 *Llamaremos valor real aquel que tomamos como referencia en un cálculo o en una experiencia. Lo denotaremos sencillamente como x.*

Como ya hemos dicho, en ocasiones el valor real de la magnitud que estemos considerando no proviene del análisis sino de un experimento. Si esto ocurre no se sabe a ciencia cierta cuál es dicho valor, y se toma como real aquel que se considera más *probable*. Estudiaremos con más profundidad esta parte en la sección en la que tratamos la *teoría del error*.

Definición 3.2 *Dado un valor real, x, diremos que un valor x_i es un valor de aproximación o sencillamente una aproximación si es un valor* cercano *a x.*

La *cercanía* de una aproximación x_i a un valor real x tiene la apariencia de ser un concepto bastante subjetivo. No es cierto. En el fondo podemos *clasificar* las aproximaciones dependiendo de su *cercanía* al valor real. La idea es que las aproximaciones pueden medirse y dicha medición es lo que se conoce como error.

En esta parte no vamos a tratar de cómo *elegimos* el valor real, en el caso de que éste se desconoca, sino que lo dejaremos para cuando desarrollemos la teoría del error de una sección posterior. Por ahora solo daremos unas definiciones básicas.

Definición 3.3 *Llamaremos error absoluto a la diferencia en valor absoluto entre el valor real y el valor de aproximación:*

$$r_i = |x - x_i|$$

Definición 3.4 *Llamaremos error relativo, ϵ_i, al error absoluto visto* porcentualmente *sobre el valor real, es decir:*

$$\epsilon_i = \frac{r_i}{x}$$

Podemos multiplicar por 100 *para obtener un porcentaje:* $\epsilon_i \cdot 100\,\%$

En ocasiones el dato del valor absoluto no es suficientemente válido, y resulta preferible trabajar con el error relativo, pues éste nos ofrece una mejor perspectiva del *acercamiento* al valor real.

Como ejemplo considérense los valores reales $x = 1$ e $y = 0,01$, y como aproximaciones de ambos, $x_1 = 1,1$ e $y_1 = 0,11$ repectivamente.

Los errores absolutos resultan:

$$\epsilon_1 = |1 - 1,1| = 0,1$$

$$\delta_1 = |0,01 - 0,11| = 0,1$$

Ambos valores coinciden con las aproximaciones tomadas. Estamos obteniendo por tanto el mismo error absoluto. Sin embargo:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_1}{1} = \frac{0,1}{1} = 0,1 = 10\,\%$$

$$\delta_1 = \frac{\delta_1}{0,01} = \frac{0,1}{0,01} = 10 = 1000\,\%$$

Ahora se intuye, a la vista de los errores relativos, que la aproximación de $y = 0,01$ por $y_1 = 0,11$ es mucho más burda que la de $x = 1$ por el valor $x_1 = 1,1$.

3.1. Errores por truncamiento y por redondeo

La era de la informática ha permitido acelerar el trabajo con las operaciones elementales de una forma que muy pocos predecían en la década de los 50. No obstante; su introducción no ha resuelto la cuestión que ya tenían los matemáticos anteriores cuando intentaban resolver problemas en los que intervenían algoritmos de iteracción. Al no poder trabajar con infinitas cifras decimales se necesita decidir qué *selección* se elige de un número en una iteracción particular con el fin de que los errores que se vayan acumulando no impidan la resolución del problema.

En definitiva, teniendo en cuenta que solo podemos trabajar con un número finito de decimales, es necesario *eliminar* los restantes de las operaciones, a partir de uno prefijado de base.

Tenemos dos formas de hacer esto: por *truncamiento* y por *redondeo*.

3.1.1. Truncamiento

La aproximación por *truncamiento* consiste básicamente en *eliminar* las cifras restantes de un valor dado a partir de una dada. Como ejemplo podemos poner al número π. Se sabe que tiene infinitas cifras decimales, que es no periódico, que es irracional e incluso