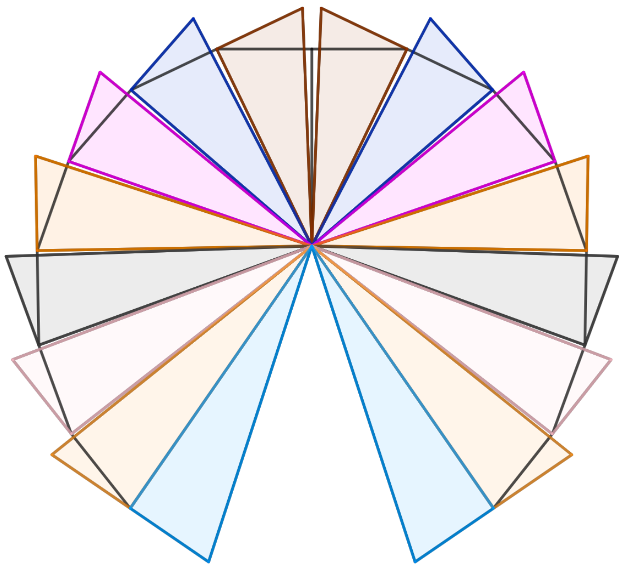
JORGE MORRA

Tema 20. El lenguaje algebraico. Símbolos y números. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve. Evolución histórica del álgebra.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 20. El lenguaje algebraico. Símbolos y números. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve. Evolución histórica del álgebra.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigésimo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el del lenguaje algebraico, los símbolos, números, la importancia de su desarrollo y problemas que resuelve, además de la evolución histórica del Álgebra.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigésimo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, abril de 2021

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema? 6

2. Introducción 7

3. El lenguaje algebraico. Símbolos y números 8

4. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve 9

5. Evolución histórica del álgebra 11

5.1. Egipto y Babilonia 11
5.2. Grecia 13
5.3. La Edad Media 15
5.3.1. China 15
5.3.2. India 16
5.3.3. El álgebra árabe 17
5.3.4. Europa 19
5.4. La Edad Moderna 19
5.5. La Edad Contemporánea 23
5.5.1. El siglo XIX 24
5.5.2. El siglo XX 26

6. Conclusiones 27

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante de un tema eminentemente histórico. En él se realiza un recorrido del Álgebra a lo largo de los siglos, desde las primeras culturas egipcias y mesopotámicas hasta nuestros días.

- La *introducción* es importante, concreta el tema y lo sitúa, además de presentarlo.

- De la parte del *lenguaje algebraico, símbolos y números* es importante desarrollar la diferencia de la notación retórica, sincopada y simbólica ocurrida a lo largo de los siglos. Además de en qué momento de la historia hay una conversión de una a la otra.

- De la parte *importancia de su desarrollo y problemas que resuelve* es necesario entender la idea que se encuentra detrás del Álgebra a lo largo de la historia, sus pretensiones y objetivos, no solo de diferenciarla de otras ramas. A este respecto se debe diferenciar el álgebra anterior al siglo XVIII de ecuaciones y de expresiones, que la de los siglos posteriores, en los que se dirige a la abstracción. Es necesario diferenciarla porque su objetivo en ambos casos es sustancialmente diferente.

- De la parte *evolución histórica del álgebra* hay que saber desarrollar toda la transformación que ha sufrido esta parte de la matemática desde Babilonia hasta nuestros días. Especial hincapié debe hacerse de tres periodos históricos. El primero con el álgebra geométrica griega, el segundo con la resolución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas de Cardano y el tercero con la introducción de la teoría de grupos y la resolución de las ecuaciones quínticas y de grado superior por Galois, lo que llevó a la creación del álgebra abstracta. Por último deben introducirse también los cuaterniones, el álgebra de Boole, y la teoría de matrices, y el comienzo del álgebra lineal. No olvide tampoco el lector mencionar a Al-Khowarizmi y a su *Al-jabr*.

2. Introducción

Aunque podríamos considerar a la Aritmética como el origen de la Matemática en sí, el Álgebra tiene su comienzo con la invención de la escritura. Es claro que los primeros símbolos que podrían sustituir operaciones o números no surgen al principio, pero esto no implica que en la primera resolución de problemas con que se encontraron las civilizaciones antiguas no estuvieran implícitas las primeras incógnitas. En cualquier caso, aunque podríamos considerar que para hablar de álgebra es necesario que tanto las operaciones como los números sean sustituidos por letras, creemos que podemos datar los comienzos de este área de las Matemáticas en los albores de la civilización. La razón es obvia, no pensamos que para hablar de Álgebra necesitemos que *"la x marque el lugar"*, sino que existan problemas que no sean puramente aritméticos, en los que se busca, bajo unas premisas previas, un valor que se desconoce. El álgebra comienza siendo una forma de sistematizar los problemas aritméticos con que se encuentra el hombre. Eso sí, y debemos decirlo también, el álgebra de hace 5000 años no tiene mucho que ver con la actual.

Esta disciplina se introduce en los colegios e institutos añadiendo un nivel en la abstracción del alumno. Hasta este momento los estudiantes se han limitado a resolver problemas de Matemáticas en los que se conocen los datos previos y se busca un resultado. Por ejemplo, los típicos problemas de sumas, restas, productos o divisiones: Juan compra 5 refrescos a $0,80$ euros el refresco, y 3 bolsas de patatas a $1,5$ euros cada bolsa; si paga con 20 euros, se le pregunta cuánto le devuelven. También otros problemas como (y aquí ya tenemos una primera introducción del álgebra), aquellos en los que se pide que se calcule una cantidad concreta utilizando una fórmula. Por ejemplo el cálculo del área de un polígono regular, o la longitud de una circunferencia. Pero en ninguno de éstos se le está pidiendo que aumente su capacidad de abstracción. Con el incremento en los contenidos de Matemáticas de los polinomios y ecuaciones se le pide que *realice operaciones* con ellos sin saber exactamente qué es lo que está haciendo, ni el fin que conllevan tales operaciones.

En textos antiguos, que veremos más adelante y que datamos de la época babilónica, encontramos problemas en los que se pide el valor de una cantidad que se desconoce y para la cuál nos dan algún tipo de información. Nosotros consideraremos Álgebra al planteamiento y resolución de estos problemas, aunque ni lo uno ni lo otro se acerque ni remotamente a lo que actualmente consideramos Álgebra, ni tan siquiera en la forma actual de resolver tales cuestiones.

El comienzo fueron los problemas, y con ellos los métodos de resolución. Después llegó la notación y poco a poco la introducción de nuevos números que *resolvieran* nuevas ecuaciones y que justificaran la resolución de otras. El álgebra actual dista mucho de limitarse a mera notación o a la simple resolución de problemas utilizando ecuaciones, el álgebra como la contemplamos hoy día estudia las propiedades de las operaciones entre los conjuntos por sí misma, estudia la estructura y la forma, tiene un concepto mucho más axiomático y tiene innumerables aplicaciones dentro y fuera de las Matemáticas, no solamente la resolución de problemas donde, como dijimos antes, la x pudiera marcar el lugar.

3. El lenguaje algebraico. Símbolos y números

Los conjuntos, su axiomática y la aritmética entre sus elementos son la base de la matemática actual. Entre todo esto se encuentran los números. Necesitamos y efectuamos operaciones con números, pero cuando resolvemos un problema con ellos y queremos extender o demostrar sus propiedades necesitamos *sustituirlos* por letras. Surge la abstracción porque ahora las letras podrán efectuar operaciones entre ellas, sin que signifiquen nada tales operaciones; tan solo lo que originalmente supongamos que significan. El álgebra no trata de resolver ecuaciones, ni de resolver problemas, el álgebra intenta estudiar las propiedades de elementos a los que se les aplica unas operaciones con unas propiedades concretas; trata de estudiar su forma, su estructura, trata de extraer resultados generales de esta estructura y de aplicar tales resultados.

La notación algebraica a lo largo de la historia tiene tres períodos bien caracterizados.

- El primero es *retórico* en el que las operaciones y cálculos se escriben con palabras y algunos símbolos. Es el que se utiliza en las primeras etapas de la historia, en Babilonia y en Egipto.

- El segundo es *sincopado* en el que las palabras que describen las operaciones se abrevian o se acortan. Es una forma simplificada de lenguaje retórico. No aporta nada a la forma de resolver el cálculo.

- La tercera es *simbólica* que es la que utilizamos hoy día. Es una forma completa de escribir en álgebra, y como se puede esperar ha ido evolucionando desde sus primeros comienzos a principios del siglo XVII, hasta nuestros días.

Uno de los primeros textos en los que encontramos notación sincopada es la *Arithmetica* de Diofanto, sin embargo en obras posteriores, este progreso en cuanto a la forma de escribir no se afianza.

La palabra Álgebra proviene, como veremos más adelante, de una de las obras más importantes publicadas por los árabes, *Al-jabr* de Al-Khowarizmi. En dicho tratado se explicaba los procedimientos habituales para la resolución de ecuaciones con una indeterminada. El lenguaje en Al-jabr seguía en parte siendo retórico, aunque en él se explican cómo *reducir* cantidades iguales a ambos términos de la igualdad. Concretamente, el término *al-jabr* podía significar el hecho de sumar cantidades iguales a ambos miembros de una ecuación. Esto y las reglas elementales de la aritmética permitía la cancelación de términos iguales. En nuestro lenguaje expresamos este procedimiento como el hecho de escribir una nueva ecuación equivalente a la anterior; siendo dos ecuaciones equivalentes aquellas que tienen las mismas soluciones.

La Edad Media no fue precisamente una etapa de progreso en las matemáticas y por supuesto en el álgebra. El lenguaje siguió siendo parcialmente retórico, con muy poca sincopación. Durante el Renacimiento se desarrollaron nuevos métodos para la resolución de ecuaciones[1] y no fue hasta finales de este período de la historia cuando descubrimos los primeros pasos en notación simbólica; hasta este momento encontramos los símbolos p

[1]Hasta el siglo XIX prácticamente el álgebra se limitaba a la resolución de ecuaciones y sistemas, de una o varias variables y de distinto grado.

para la suma y m para la resta, abreviaturas de *plus* y *minus*, o también R para la raíz cuadrada. Para Viète, años más tarde, las consonantes significaban números y las vocales incógnitas, primeros pasos en lenguaje simbólico.

Los símbolos + y − fueron introducidos por mercaderes alemanes, pero para delimitar el exceso o el defecto de mercancías, lejos de significar algo algebraicamente. Estos símbolos convivieron con p y m a lo largo de todo el período medieval, aunque se fueron afianzando poco a poco.

Con la Edad Moderna el álgebra ya es prácticamente simbólica. Descartes, Fermat y todos los matemáticos previos a la revolución francesa utilizan símbolos para números, incógnitas y operaciones.

4. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve

El álgebra, como la aritmética y otras partes de la matemática surge a lo largo de la historia por la necesidad de resolver problemas. En Babilonia o en Egipto las cuestiones que se plantearon eran primordialmente problemas de aplicación sobre medidas de tierras o de distribución de grano o semillas. En la Tablilla YBC 4652 de la antigua Babilonia podemos encontrar escrito:

> *Encontré una piedra, pero no la pesé. Después pesé 6 veces su peso, añadí 2 gin y añadí un tercio de un séptimo multiplicado por 24. Lo pesé. El resultado era 1 mana. ¿Cuál era el peso original de la piedra?*

Teniendo en cuenta que 1 mana es igual a 60 gin, con el lenguaje algebraico de hoy día, un estudiante de secundaria podría plantear una ecuación que resolvería el problema:

$$(6x+2) + \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} \cdot 24 \cdot (6x+2) = 60$$

Nuestro método de resolución dista bastante del empleado en Babilonia, el planteamiento ya es simbólico mientras que el suyo era puramente retórico.

Otra obra de gran importancia podemos datarla en la Edad Media y es el *Liber Abaci* de Fibonacci. Se trataba de un tratado dedicado a comerciantes en el que descubrimos un sistema de ecuaciones diofánticas.

> *Un hombre compra 30 pájaros: periquitos, milanos y gorriones. Un periquito cuesta 3 monedas de plata, un milano 2, y un gorrión media moneda. Él paga 30 monedas de plata. ¿Cuántos pájaros de cada tipo compra?*

A la vista del planteamiento sabemos que se trata de un sistema de ecuaciones lineales cuya solución se busca dentro de los enteros positivos.

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x + 2y + z/2 = 30 \end{cases}$$

En el Renacimiento se publica el *Ars Magna* de Cardano. En este tratado se dan las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas, de Tartaglia y Ferrari respectivamente. Pero se deja abierto el problema de la solubilidad de las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. No es hasta siglos después cuando Abel prueba que no es posible resolver algebraicamente las ecuaciones de grado 5 o superior, es decir, no existe fórmula que dé una solución a una ecuación arbitraria de grado 5. No obstante, no afirma nada sobre cuándo una ecuación sí tiene solución en radicales. La teoría de grupos posterior, o más explícitamente la teoría de grupos de Galois resuelve esta cuestión. Este matemático francés da una caracterización sobre cómo debe ser el grupo asociado a la ecuación para que ésta pueda resolverse en radicales.

La idea no es tan sencilla, pero se le ocurrió a una de las mentes matemáticas más brillantes del siglo XIX. Se trataba de *ver* que el conjunto de soluciones de una ecuación algebraica se podía representar mediante grupos de simetrías. A partir de aquí cada ecuación tendrá asociado lo que se denomina su grupo de Galois. Parece broma, porque así dicho se simplifica bastante toda una teoría repleta de definiciones y teoremas, que conectaba las estructuras de cuerpos con las de grupos. Galois demostró que para que una ecuación algebraica fuera resoluble en radicales era necesario y suficiente que su grupo de Galois fuera resoluble[2]. Entonces, todo se reducía a saber si el grupo de Galois de una ecuación algebraica es resoluble. Poniendo un ejemplo con las ecuaciones quínticas, necesitaríamos saber si el grupo de Galois de una ecuación arbitraria de grado 5 es resoluble, pero se sabe que el grupo de simetrías S_5 no es resoluble, por consiguiente su grupo de Galois tampoco y la ecuación no puede ser resuelta en radicales. No obstante, esto no es óbice para que una ecuación concreta de grado mayor o igual a cinco pueda tener soluciones por radicales. Para ello basta estudiar su grupo de Galois. Si este es resoluble, la ecuación podrá resolverse algebraicamente, y si no lo es, no.

Pero además, la teoría de Galois tiene más aplicaciones que la resolución de las ecuaciones quínticas o de grado mayor, aunque originalmente este fuera su objetivo. En cualquier ecuación algebraica con coeficientes en un cuerpo, K, el teorema fundamental de la Teoría de Galois nos dice que la estructura de K se encuentra implícita en el grupo de Galois de la ecuación. Esto permite estudiar un conjunto K, que puede contener infinitos elementos y que además sea continuo, por medio de otro, el grupo de Galois, que es discreto.

Por último añadiremos en esta parte otro de los grandes problemas algebraicos resueltos a finales del XX: *el Último Teorema de Fermat*. Este matemático afirmó que no era posible encontrar una terna (x, y, z) de números enteros tales que $x^n + y^n = z^n$ cuando $n \geqslant 3$. Fermat escribió este resultado en los márgenes de una de las ediciones de Diofanto argumentando que no escribía la demostración porque el espacio era demasiado pequeño para contenerla.

Se cree que Fermat utilizó el proceso de *descenso infinito*, habitual para demostrar este tipo de resultados; sin embargo no fue suficiente, el problema estuvo abierto durante siglos y fueron necesarios resultados de geometría algebraica, de teoría de números y de teoría de grupos para poder resolverlo. Demos una idea muy simplificada.

Una *curva elíptica* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ puede expresarse a través de una ecuación del

[2] Un grupo resoluble es aquel en el que existe una cadena finita de n subgrupos de G, $\{G_i\}$, con $G_i \subset G_{i+1}$, $G_o = 1_G$ y $G_n = G$; donde cada G_i es subgrupo normal en G_{i+1} y el grupo cociente G_{i+1}/G_i es abeliano.