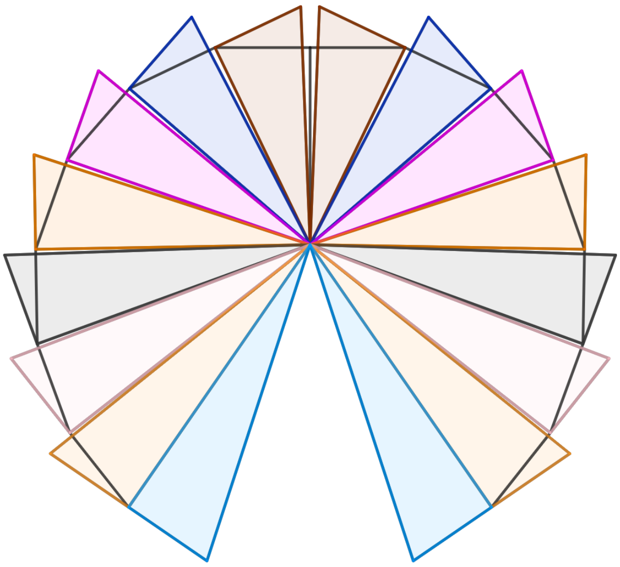
JORGE MORRA

Tema 21. Funciones reales de variable real. Funciones elementales; situaciones reales en las que aparecen. Composición de funciones

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 21. Funciones reales de variable real. Funciones elementales; situaciones reales en las que aparecen. Composición de funciones



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigesimoprimer cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el las funciones reales de variable real, funciones elementales, las situaciones reales en las que aparecen y la composición de funciones.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigesimoprimer cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, agosto de 2021

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante el primer tema de la parte de Análisis.

- La *introducción* es importante, concreta el tema y lo sitúa, además de presentarlo.
- De la parte del *funciones reales de variable real* es importante que defina el concepto de función de forma general para luego restringirse a los números reales. Es importante también añadir algún ejemplo, así como los conceptos de dominio e imagen.
- De la parte *Composición de funciones* debe definirse la composición, y las condiciones en las que es posible esta operación entre funciones. También deben enunciarse y demostrarse sus propiedades, así como la estructura algebraica que forma.
- De la parte *suma, diferencia, producto y cociente de funciones*, se deben definir todas las operaciones y enunciar al menos las estructuras algebraicas que se crean a partir de ellas. Las demostraciones son opcionales.
- La parte *funciones elementales* es sin ninguna duda la más importante del tema. Un buen desarrollo de esta es el que marcará la diferencia. Es importante entender toda la sección aunque las demostraciones se omitan. Tenga en cuenta el lector que es aquí dónde se justifica el hecho de que haya funciones que no tengan *primitiva elemental*.
- De la parte *situaciones reales donde aparecen* deben añadirse algunos ejemplos, los que el lector considere oportunos; puede elegir los que están en el tema u otros que crea más conveniente. A su elección.

2. Introducción

El concepto de función es sin duda uno de los más importantes de todas las matemáticas. Junto con el de número, y en concordancia con él, son la base de prácticamente todas las ramas de esta ciencia; es básico en todas las áreas puras y se utiliza para describir el entorno en el que vivimos.

No podemos afirmar que se conociera en el mundo antiguo, aunque los babilonios, egipcios y luego griegos representaran tablas en las que aparecía una variable dependiendo de otra. Estas tablas de mediciones pueden considerarse hoy día funciones, no obstante podemos pensar que el concepto de relación entre dos variables de tipo general no era conocido todavía hace 5000 años.

La Edad Media no es buen ejemplo de innovación científica ni de adelantos que sorprendieran al mundo. Su oscurantismo se vio reflejado también en las Matemáticas. No fue hasta la Edad Moderna cuando se empezaron a desarrollar los números reales y el Análisis Matemático. El resultado, como cabe esperar, es la introducción de las funciones como concepto elemental, pero todavía sin tener una definición concreta y clara con la que trabajar.

Ni René Descartes (1596-1650), ni Pierre de Fermat (1607-1665), ni Isaac Newton (1643-1727) o Gottfried Leibnitz (1646-1716) definieron una función real como la conocemos hoy día. Se limitaron a trabajar con ecuaciones en una o varias variables, en las que podría reconocerse una dependencia entre las variables; pero de este al concepto de función había todavía un pequeño trecho que caminar. El desarrollo del cálculo infinitesimal requería de variables que dependían funcionalmente y se dieron cuenta que toda la teoría que se podría crear a partir del concepto de diferenciabilidad debería contener implícitamente la idea de lo que debería ser una función.

A lo largo del XVIII y principios del XIX observamos referencias al término de función en textos de numerosos matemáticos, sin que ninguno de estos dé una definición concisa de aquel. Así, por ejemplo encontramos menciones con Johann Bernouilli (1667-1748), que habla de *función de alguna indeterminada*, o con Leonard Euler (1707-1783) diciendo que una función era *cualquier relación entre x e y que se encuentre representada en el plano por medio de una curva*. Fíjese el lector, que aún con la idea preconcebida de lo que querían que fuese una función, seguían sin dar una definición concreta.

Fue ya a mediados del XIX, con Nikolai Lobachevsky (1792-1856), cuando este generaliza la idea y añade que, para dotar de dependencia a dos variables, no es necesaria la inclusión de una fórmula. Concretamente dice:

> *"El concepto general de función requiere que por función de x se entienda el número que adopta cada x y que junto que x varía gradualmente. El valor de la función puede ser dado por una expresión analítica o por cierta condición que proporcione un medio para comprobar todos los números y elegir uno de ellos; o, por último, tal dependencia puede existir y permanecer incógnita".*

Lobachevski introduce dos ideas: la primera es que implícitamente está hablando de dominio, y la segunda es que no son necesarias ni fórmulas ni ecuaciones para definir funciones.

Años más tarde Dirichlet (1805-1859) da una definición de función lo más cercana a la que conocemos hoy día. De hecho es conocido su ejemplo de una función que no es continua en ningún punto de su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{I} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este tema nos centraremos indudablemente en las funciones reales de variable real, que son una parte relativamente pequeña de la gran variedad de funciones que nos podemos encontrar. Tengamos en cuenta que la idea de función es tan general, que se encuentra inmersa en todo cuanto podamos escribir o leer en matemáticas.

La definición concreta de función la daremos en la siguiente sección del tema, pero ahora queremos dar una idea general de dicho concepto. Comenzamos con dos conjuntos X e Y. Cuando a cada elemento de X le hacemos corresponder un único elemento del conjunto Y, estaremos definiendo una función. Habitualmente denotamos a las funciones con letras, y aunque se las puede denominar con el nombre que queramos, solemos utilizar la primera letra de la palabra función, es decir, la f. Cuando tenemos varias funciones definidas seguimos el orden alfabético, y a la segunda le llamamos g; o bien las numeramos: a la primera la llamamos f_1 y a la segunda f_2; y así sucesivamente. A este respecto, los matemáticos somos poco imaginativos.

Escribiremos como $f(x)$ el elemento del conjunto Y al cual hemos hecho corresponder el elemento x, esto es, $y = f(x)$. Diremos que y depende de x, o dicho de otra forma que los elementos del conjunto Y dependen de los del conjunto X. También podemos expresarlo diciendo que la variable del conjunto Y es la variable dependiente, y la del conjunto X la variable independiente. Solemos en este caso escribir también $f : X \longrightarrow Y$.

Dentro de todas las funciones reales de variable real que podemos tener, haremos una mención especial a las llamadas *funciones elementales*. La definición de este tipo de funciones comienza con el planteamiento de los matemáticos del siglo XIX, en especial de Joseph Liouville (1809-1882), de distinguir aquellas funciones que tienen *primitiva elemental*. Entendemos por esta, aquella función que surge a raíz de las operaciones habituales de suma, diferencia, producto, cociente y composición de: polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones irracionales y funciones trigonométricas y sus inversas. Originalmente Liouville solamente consideró a los polinomios, exponenciales y logaritmos, las irracionales y las trigonométricas surgieron a partir de las operaciones entre las anteriores. Para esto habría que tener en cuenta que en los trabajos en los cuales expuso toda esta teoría, las funciones eran complejas, y las funciones trigonométricas por ejemplo pueden ponerse en función de exponenciales complejas, como veremos en una sección posterior del tema. Nosotros no vamos a enunciar el *conocido* Teorema de Liuoville, porque es más una serie de trabajos que un teorema en sí. La teoría, de *integración en términos finitos*, o *integración en términos de funciones elementales*, se generalizó años más tarde, en 1946, con los trabajos de Alexander Ostrowski (1893-1986) y finalmente, en 1968, con Maxwell Rosenlicht (1924-1999) quien publicó un resultado puramente algebraico de los trabajos de Liouville y Ostrowski.

3. Funciones reales de variable real

Comencemos con algunas definiciones previas.

Definición 3.1 *Dado un conjunto X, y dados dos elementos de dicho conjunto x, x'. Llamaremos par ordenado a la pareja (x, x') donde x denota el primer elemento del par y x' al segundo elemento.*

Es necesario hacer una pequeña observación. Dados dos elementos $x, x' \in X$, tenemos que distinguir entre (x, x') y $\{x, x'\}$. El primero hace referencia a un par ordenado en el que es importante el *orden* de los elementos; mientras que el segundo es sencillamente el conjunto formado por x y x', en el que lógicamente no estamos considerando ningún orden.

Definición 3.2 *Dados dos conjuntos X e Y, llamaremos producto cartesiano de X e Y y lo denotaremos como $X \times Y$ al conjunto de pares ordenados del tipo (x, y) donde $x \in X$ e $y \in Y$.*

Definición 3.3 *Dados dos conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$. Una función f es una colección de pares ordenados de $X \times Y$*

$$f \subset \{(x, y) \in X \times Y\}$$

tales que, si (x, y) y (x', y') son dos pares pertenecientes a dicha colección con $x = x'$, entonces $y = y'$.

Si el elemento $(x, y) \in f$, solemos escribirlo en la forma $y = f(x)$.

De forma habitual denotamos a las funciones como:

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Ciertamente en la mayoría de los textos matemáticos, el concepto de función se sobreentiende, y como mucho se da una definición algo menos explícita. Solemos leer que una función es una regla que asocia a un elemento de un conjunto otro elemento de otro conjunto con la salvedad de que éste último elemento tiene que ser único; es decir que si dos elementos son iguales entonces sus asociados correspondientes son también iguales.

Algunas definiciones más.

Definición 3.4 *Al elemento y, que es el asociado del elemento x, le llamamos* imagen de *x.*

Por lo dicho antes, un elemento no puede tener dos imágenes distintas.

Definición 3.5 *Al conjunto X se le llama conjunto inicial, y a Y conjunto final o conjunto imagen.*

En el caso que nos ocupa, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función e Y es un subconjunto de números reales diremos que f es una *función real.*

Por otra parte, si $X \subset \mathbb{R}$ entonces diremos que f es una *función de variable real.*

Obviamente, si tanto X como Y son conjuntos de números reales estaremos diciendo que f es una *función real de variable real.* En este caso, al conjunto inicial se le suele llamar *dominio*[1] *de* f; y al conjunto final, *imagen*[2] o *recorrido*. El dominio se denotará como $Dom(f)$, y la imagen como $Im(f)$

[1] Mas adelante veremos una definición de dominio distinta de esta; concretamente un *dominio* dentro de los complejos es un conjunto abierto y conexo. Será fácil distinguir una de la otra dependiendo del contexto en el que se utilice.

[2] A lo largo de todo el tema nosotros utilizaremos el término *imagen* en vez del de recorrido

Podemos ver que las funciones son estrictamente *reglas* que asocian a elementos de un conjunto otros elementos de un segundo conjunto, con la única restricción que un elemento dado no puede tener dos imágenes distintas.

Pero, ¿qué reglas? Pues en el fondo cualquier regla que cumpla la exigencia de que ningún elemento puede poseer dos imágenes. La regla no tiene que venir dada por una fórmula, no tiene que ser explícita, ni implícita, ni tiene que estar definida para todos los elementos del conjunto inicial, ni tampoco todos los del conjunto final tienen que ser necesariamente asociados de algún otro del inicial.

Pero sí es importante afirmar que para que dos funciones coincidan tienen que hacerlo en todos los puntos de su dominio. De forma implícita estamos diciendo que deben coincidir en dicho dominio; en otro caso las funciones no pueden ser consideradas iguales.

Pongamos algunos ejemplos:

a) La regla que asocia a cada número real su cuadrado.

   Esta viene dada por una fórmula:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & x & \longmapsto & y = x^2 \end{array}$$

   De la cual es muy sencillo calcular las imágenes de algunos de los elementos del conjunto inicial. La imagen del 2 es el 4 e incluso la imagen del -2 también es el 4. Podemos decir de ella que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y que su imagen son los reales positivos incluido el cero.

b) La regla que asocia a cada número real el número

$$\frac{x}{x^2+1}$$

   que viene dada también por una fórmula:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}$$

   En esta función su dominio también es la totalidad de los reales, sin embargo su imagen no es, ni mucho menos, $\mathbb{R}$. Se deja su cálculo como ejercicio para el lector.

c) La regla que asocia a cada elemento de $\mathbb{R}$ el elemento

$$\frac{x}{x^2-1}$$

   que escribimos

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$$

   donde el leve cambio de un signo en el denominador modifica en gran medida la función. Ahora el dominio de f no es todo $\mathbb{R}$, puesto que los elementos 1 y -1