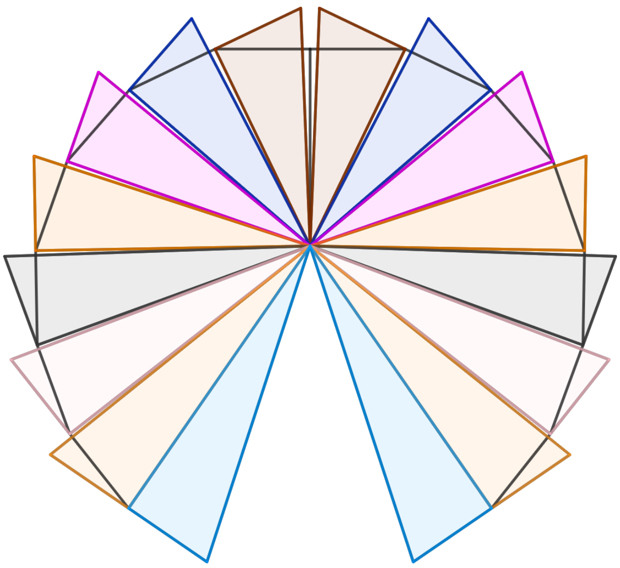
JORGE MORRA

Tema 22. Funciones exponenciales y logarítmicas. Situaciones reales en las que aparecen.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 22. Funciones exponenciales y logarítmicas. Situaciones reales en las que aparecen.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigesimosegundo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el las funciones exponenciales y logarítmicas y las situaciones reales en las que aparecen.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigesimosegundo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, octubre de 2021

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante el segundo tema de la parte de Análisis.

- Toda la *introducción* es importante, concreta el tema y lo sitúa, además de presentarlo.
- De la parte *la función logarítmica* es importante señalar qué es lo que queremos del logaritmo, pues de esa forma justificamos la definición posterior. La proposición 3.2 debe enunciarse y demostrarse al completo. También los logaritmos en otra base y las representaciones gráficas.
- De la parte *la función exponencial* son necesarias tanto la definición como el enunciado de la proposición 4.2. La demostración es muy sencilla y puede omitirse. Las partes de *a función exponencial como potencia* y *la función exponencial como límite* deben añadirse al completo, así como toda la parte de las gráficas.
- La parte *situaciones reales en las que aparecen* deben incluirse al menos tres de las aplicaciones del logaritmo o de la exponencial. Se deja a criterio del lector. Puede elegir las que vienen en el tema o bien otras que considere más interesantes.
- La parte *conclusiones* es necesaria, pero va a depender del desarrollo que haya elegido. Siempre serán las conclusiones del lector, no las del tema.

2. Introducción

Los conceptos de logaritmo y exponencial están íntimamente relacionados. Ahora, después de su invención hace casi cuatro siglos, sabemos que en cierto modo un concepto es el inverso del otro.

Pero no adelantemos acontecimientos. Podemos precisar que la creación de los logaritmos se debe a dos matemáticos de finales del XVI y comienzos del XVII: John Napier (1550-1617) y Jobst Bürgi (1552–1632). Aunque todo el mérito se lo llevó Napier pues fue el primero en publicar sus resultados, que hizo en 1614 con la obra *Mirifici logarithmorum* *canonis descriptio* (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos), es incluso posible que Bürgi tuviera conocimientos previos de estos antes que Napier, pero el hecho de que su publicación fuera seis años más tarde le ha relegado la historia a un papel secundario.

En la actualidad se utilizan principalmente dos logaritmos, o mejor dicho dos bases de logaritmo, el neperiano en honor a Napier y el de base 10 o decimal a raíz del clérigo y matemático inglés Henry Briggs (1561-1630). Aunque Napier llegó a sugerir la posibilidad de una tabla basada en las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$, fue Briggs el que llevó a cabo el desarrollo de esta idea en su obra *Logarithmorum chilias prima*, en el que escribió los logaritmos de los primeros 1000 números naturales con una aproximación de catorce cifras decimales. En trabajos posteriores amplió el cálculo hasta los cien mil primeros naturales.

Las funciones logarítmica y exponencial, que surgieron después de todo el desarrollo de los logaritmos, podemos encontrarlas en la Naturaleza, en la Economía y en general en la Matemática aplicada.

De forma natural el desarrollo y definición de ambas funciones comienza con el de la función logarítmica. La exponencial surge a raíz de ella, como su inversa. Nosotros seguiremos el desarrollo natural comenzando por los logaritmos. El porqué no es casual, bien podríamos hacerlo partiendo de la función exponencial y a partir de aquí definir la logarítmica. El problema de esta forma surge al intentar extender la exponencial a los números irracionales.

Tomemos por ejemplo las potencias de 10:

$$10, 10^2, 10^3, 10^4, \cdots, 10^n$$

Sabemos cómo son los términos de la anterior sucesión, cada uno de ellos tiene tantos ceros como indica el exponente. Esto permite definir la exponencial de base 10 cuando el exponente es un número natural.

Además es fácil comprobar que para los naturales $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$. Si pretendemos *conservar* esta propiedad para los enteros, podemos *extender* al cero:

$$10^0 \cdot 10^n = 10^{0+n} = 10^n$$

con lo que

$$10^0 = 1$$

Y a los números negativos:

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

ya que

$$10^n \cdot 10^{-n} = 10^{n-n} = 10^0 = 1$$

Es sencillo seguir con los racionales. Tomemos $1/q \in \mathbb{Q}$

$$\underbrace{10^{1/q} \cdot 10^{1/q} \cdot \ldots \cdot 10^{1/q}}_{q \text{ veces}} = 10^{\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}} = 10^1 = 10$$

De esta forma

$$(10^{1/q})^q = 10$$

con lo que

$$10^{1/q} = \sqrt[q]{10}$$

Ahora es fácil seguir con $p/q \in \mathbb{Q}$

$$10^{p/q} = \sqrt[q]{10^p}$$

El problema lo tenemos cuando queremos *saltar* a los irracionales, esto es $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$. Pero esta extensión no es posible algebraicamente, necesitaríamos salir de aquí e introducir la continuidad de una función que ni siquiera hemos llegado a definir. Esto no quiere decir que no sea posible este camino, claro que lo es y en numerosos textos de Análisis se sigue, no obstante, nosotros hemos pensado que es más sencillo y natural hacerlo por el camino que sigue la mayoría de los autores, es decir, a partir de la función logarítmica.

3. La función logarítmica

La propiedad fundamental que vamos a exigir a nuestra función logarítmica es sencillamente esta:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{3.1}$$

Las restantes propiedades que seguro conoce el lector se obtienen a partir de ella y de la continuidad. Algo que iremos viendo en las siguientes secciones.

Este tipo de ecuaciones pueden tener más de una solución, la trivial es una de ellas pues tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que cumple 3.1; aunque obviamente no es la que buscamos.

Llegamos a otras consideraciones como que si 1 es un elemento del dominio de f entonces $f(1) = 0$ ya que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$. O que si -1 pertenece al dominio volveríamos a tener $f(-1) = 0$ ya que $0 = f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = 2 \cdot f(-1)$. Pero curiosamente el 0 no puede pertenecer al dominio porque en ese caso solamente tendríamos la solución trivial, es decir $f = 0$. Dejamos esta prueba para el lector.

Siguiendo con otros valores por ejemplo con $x = 2$.

$$f(-2) = f((-1) \cdot 2) = f(-1) + f(2) = f(2)$$

Y generalizando:

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x \neq 0$, lo que implica que una función f que cumpliera 3.1 y cuyo dominio fuera el conjunto de todos los reales salvo el cero, tendría que ser una función par.

No vamos a seguir el desarrollo completo a partir de aquí, sino que vamos a saltar a una posible solución. Teniendo en cuenta que en $x = 0$ no podría estar definida y que sería par en el caso de hacerlo en todos los números reales, lo haremos solamente para los reales positivos. Por otra parte, además de la continuidad que queremos que sea un requisito de f, necesitaremos además su derivabilidad. Para ello utilizaremos la integral definida. Se sabe, por el *teorema fundalmental del cálculo integral* que si tenemos una función continua, entonces su integral definida es además de continua, derivable. Dicho de otra forma, sin llegar a enunciar dicho teorema: en buenas condiciones de definición y siendo

$$F(x) = \int_a^t f(t)dt$$

entonces se puede demostrar que $F(x)$ es derivable y además:

$$F'(x) = f(x)$$

Nosotros buscamos un logaritmo que tenga estas propiedades.

3.1. Logaritmo natural

Definición 3.1 *Dado $x \in \mathbb{R}^+$ definimos el logaritmo natural*[1] *de x, que llamaremos inicialmente F como la integral:*

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

que puede interpretarse como el área encerrada por la función $1/t$ entre los valores 1 y x.

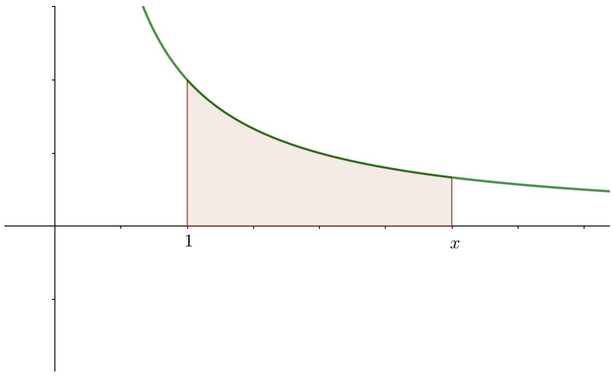


Figura 1: Área encerrada por la curva $1/t$ entre 1 y x

Continuemos con las propiedades que podemos demostrar a partir de la definición.

Propiedad 3.2 *Sea $F(x)$ el logaritmo natural, entonces:*

a) *Como ya sabemos,* $F(1) = 0$

b) $F'(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $F(xy) = F(x) + F(y)$

d) $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *es biyectiva.*

Demostración:

a) Se deduce de forma inmediata de la definición.

$$F(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

[1]Mas adelante veremos que será el logaritmo neperiano o logaritmo en base e

b) Para esta segunda parte aplicaremos el ya mencionado *teorema fundamental de cálculo.* Obteniendo:

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

de forma implícita decimos que F es también una función continua.

c) Aquí utilizamos la idea de que la integral es en definitiva una suma de áreas, y por tanto podemos escribirla como una suma de integrales.

$$F(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = F(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $xu = t$, con lo que $xdu = dt$. Y ahora, ya que t toma sus valores desde x hasta xy, la nueva variable u los tomará desde 1 hasta y, con lo que:

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{y} \frac{xdu}{xu} = \int_1^{y} \frac{du}{u} = F(y)$$

Y así:

$$F(xy) = F(x) + F(y)$$

d) La biyectividad de f se demuestra a partir de la derivabilidad. Por ser derivable es continua y al tener derivada positiva es estrictamente creciente[2] para todo x positivo. Consideremos ahora $x \neq y$. Por el orden total en $\mathbb{R}$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x < y$, y al ser estrictamente positiva $F(x) < F(y)$; por tanto $F(x) \neq F(y)$.

El hecho de ser estrictamente creciente no implica necesariamente la sobreyectividad, necesitamos que no esté acotada ni superior ni inferiormente.

En general, si $x \in \mathbb{R}^+$, para calcular $F(x^n)$ podemos descomponer la integral en una suma de integrales:

$$F(x^n) = \int_1^{x^n} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} + \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{t} + \ldots + \int_{x^{n-2}}^{x^{n-1}} \frac{dt}{t} + \int_{x^{n-1}}^{x^n} \frac{dt}{t}$$

Ahora veremos que cada uno de estos sumandos es en realidad $F(x)$.

Para $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$ hacemos el mismo cambio de antes $xu = t$, luego $xdu = dt$ y

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{xdu}{xu} = \int_1^{x} \frac{du}{u} = F(x)$$

Y en general, con

$$\int_{x^k}^{x^{k+1}} \frac{dt}{t}$$

[2] Cuando una función derivable tiene derivada positiva en un punto, la recta tangente tiene pendiente positiva y la función es creciente en dicho punto. Si la derivada fuera negativa, la pendiente de la tangente sería negativa y la función decreciente.