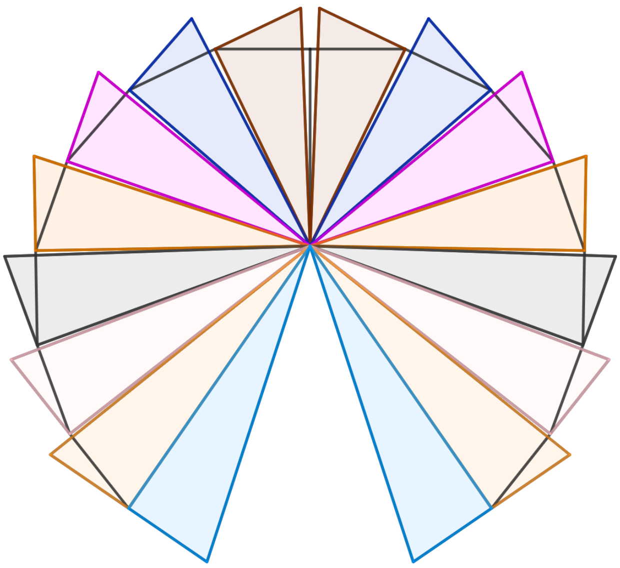
JORGE MORRA

Tema 23. Funciones circulares e hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones reales en las que aparecen.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 23. Funciones circulares e hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones reales en las que aparecen.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigesimotercer cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el las funciones circulares e hiperbólicas y sus recíprocas; y las situaciones reales en las que aparecen.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigesimotercer cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, mayo de 2022

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante el tercer tema de la parte de Análisis. Ante la gran cantidad de resultados expuestos será necesario hacer una síntesis y desarrollar solo una parte de ellos.

- La *introducción* debe añadirse al completo, aunque puede suprimirse la demostración de la identidad de Viète.

- De la sección *funciones circulares* es importante el desarrollo de las definiciones del coseno, seno y tangente. También lo es la demostración de la proposición 3.3, así como la representación gráfica de al menos el seno, coseno y tangente. El desarrollo en serie de potencias debe introducirse aunque no es necesario probarlo, así como la fórmula de Euler. Las fórmulas trigonométricas se dejan a criterio del lector. Sobre las funciones trigonométricas inversas, es importante hacer el desarrollo de una de ellas, así como de su representación gráfica.

- De la sección *funciones hiperbólicas* es importante el desarrollo de su definición (análogo al de las circulares). La proposición 4.4 debe enunciarse porque justifica la definición del coseno hiperbólico, pero no es necesaria su demostración. La proposición 4.6 debe enunciarse y demostrar una de las igualdades; la otra puede omitirse. Las proposiciones 4.8 y 4.9 son interesantes pero omitiendo la prueba. De las restantes funciones hiperbólicas y de sus recíprocas es importante añadirlas, describir alguna característica y elaborar un esbozo de la gráfica.

- De la sección *situaciones reales donde aparecen* es aconsejable enunciar las cuatro situaciones que hemos introducido. Tanto la parte de las series de Fourier como la de la catenaria deben desarrollarse convenientemente.

2. Introducción

La Trigonometría puede considerarse en sus inicios como la medida del triángulo. A partir de ella conocemos al *seno*, *coseno* y *tangente*. Posteriormente aparecieron algunas funciones más, además de sus inversas en los conjuntos dónde era posible definirlas.

Aunque encontramos indicios suyos en los textos de matemáticos hindúes de mediados del primer milenio no fue hasta el siglo XV cuando, por motivos puramente comerciales en la navegación y mejoras en las observaciones astronómicas, comenzó a asentarse. En este momento el objetivo principal era obtener tablas de senos, cosenos o tangentes con la mayor precisión posible. Después con estas tablas se podían efectuar productos relativamente complejos transformándolos previamente en sumas.

En esta introducción vamos a comenzar con las ideas básicas, como habitualmente se imparten en los cursos de Secundaria: a partir el concepto de semejanza y del teorema de Tales[1]. Después, a lo largo del tema trataremos las funciones circulares e hiperbólicas de una forma singularmente distinta.

Recordemos que dicho teorema afirma que si una pareja de rectas es cortada por una familia de rectas paralelas, entonces aparecen ciertas razones de proporcionalidad entre los segmentos que se determinan. La siguiente imagen resulta más explícita:

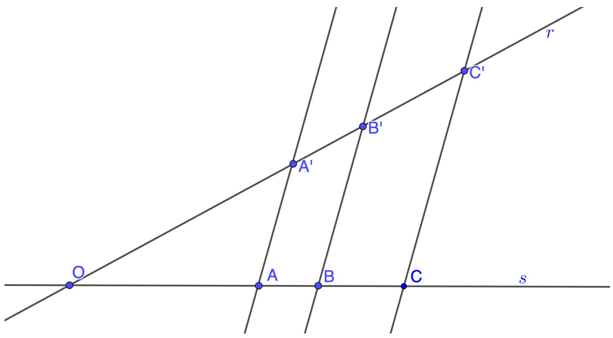


Figura 1

Se verifica que:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$$

o también

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'}$$

De donde es trivial demostrar a continuación

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{AA'/OA'}{OA/OA'} = \frac{BB'/OB'}{OB/OB'} = \frac{BB'}{OB}$$

y de la misma forma con CC' obteniendo finalmente:

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}$$

Si las rectas que cortan a r y s lo hacen perpendicularmente a una de ellas, por ejemplo a s, tenemos unas proporciones que podemos asociarlas a un ángulo concreto puesto que los triángulos que se forman son rectángulos en uno de sus ángulos.

[1]Tales de Mileto 624-546 a. C.

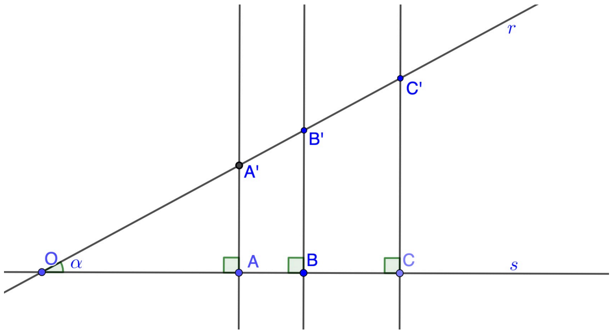


Figura 2

Así:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$$

y también

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'}$$

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}$$

Estas proporciones dependen exclusivamente del ángulo α. A partir de aquí se definen tres funciones[2]:

$$\text{coseno de } \alpha = \cos\alpha = \frac{OA}{OA'}$$

$$\text{seno de } \alpha = \operatorname{sen}\alpha = \frac{AA'}{OA'}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AA'}{OA}$$

Simplificando las expresiones, y considerando un único triángulo rectángulo tendríamos:

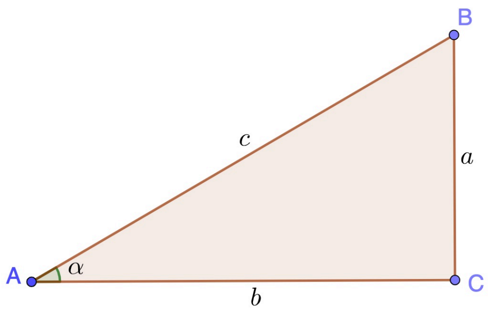


Figura 3: Triángulo rectángulo

[2]Se denominan habitualmente razones trigonométricas.

donde

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}\ , \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

A partir de aquí es sencillo calcular las razones trigonométricas de ángulos conocidos. Así para $\alpha = 45^o$, se obtendría $\cos 45^o = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen} 45^o = \sqrt{2}/2$ y $\operatorname{tg} 45^o = 1$. De forma sencilla se calcularían también para $\alpha = 60^o$ y $\alpha = 30^o$ por ejemplo.

Curiosamente, aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 3 podría demostrarse una de las principales identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

No obstante, con la definición dada hasta ahora el dominio de estas funciones se quedaba reducido a los posibles ángulos de un triángulo rectángulo, y esto se restringía a mayores que 0^o y menores que 90^o. La generalización a cualquier ángulo vino en parte por un matemático francés del siglo XVI, François Viète (1540-1603). A partir de la obra de este matemático comenzaron a aparecer nuevas identidades trigonométricas, debidas principalmente a un mayor énfasis en el cálculo analítico y menos en el cálculo de la resolución de triángulos. Entre estas nuevas identidades encontramos un grupo que se denominaron posteriormente prostaféresis. Básicamente se trataba de un algoritmo que permitía efectuar el producto o cociente de números, o la aproximación de estos, mediante identidades trigonométricas que transformaban productos en sumas.

Con la circunferencia goniómetrica[3] el dominio de definición de las funciones seno, coseno y tangente se extendió al de todos los números reales. El seno era su proyección sobre el eje Y, el coseno sobre el eje X y la tangente la extensión sobre una recta paralela al eje Y situada sobre el punto de coordenadas $(1, 0)$. No vamos a hacer una definición exhaustiva de esto, pues estamos en una introducción y el lector puede encontrarlo en cualquier libro de texto de Secundaria o Bachillerato.

Veamos solamente un caso concreto, en el que Viète, utilizando la circunferencia goniométrica y considerando los ángulos en radianes[4] y no en grados, dedujo la igualdad:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

[3]Circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio 1.

[4]Aunque se introducirá más adelante, diremos que el cociente entre la longitud del arco que abarca un ángulo central y el radio de la circunferencia se mide en radianes. En el caso que nos ocupa es solo la longitud del arco puesto que el radio mide 1.

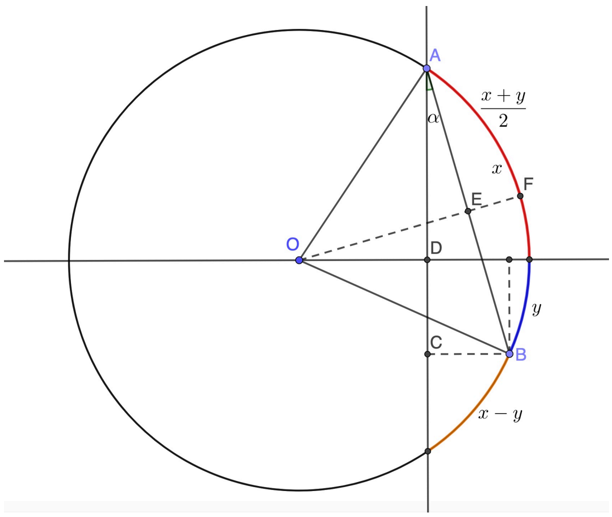


Figura 4

En efecto, es trivial que $\operatorname{sen} x = AD$ y $\operatorname{sen} y = CD$. Entonces:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = AD + CD = AC$$

Pero del triángulo ABC, rectángulo en C, puede verse que

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

con lo que $AC = AB \cdot \cos\alpha$.

Pero sabemos, utilizando la geometría elemental sobre la circunferencia, que todos los ángulos situados sobre esta y que abarquen el mismo arco miden lo mismo; pero además este valor es la mitad del ángulo central. Así, α es la mitad de $x - y$, y tendremos que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = AB \cdot \cos\alpha = AB \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

Por otra parte, la mediatriz del segmento AB pasa necesariamente por el centro de la circunferencia y divide el triángulo OAB en dos triángulos rectángulos en E. Si extendemos dicho segmento OE, cortará a la circunferencia en el punto F, de tal forma que ahora la longitud del arco AF es precisamente $(x+y)/2$. En definitiva:

$$AE = \operatorname{sen}\frac{x+y}{2}$$

y así

$$AB = 2AE = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}$$

con lo que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \tag{2.1}$$

$\otimes$