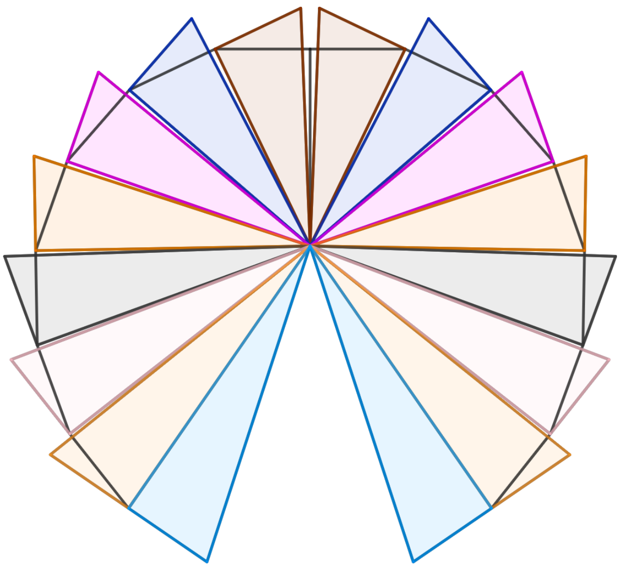
JORGE MORRA

Tema 24. Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinónica. Interpolación y extrapolación de datos.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 24. Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinónica. Interpolación y extrapolación de datos.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigesimocuarto cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el las funciones dadas en forma de tabla, la interpolación polinómica y la interpolación y la extrapolación de datos.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigesimocuarto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran, o bien conocer algo más de esta ciencia, o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, julio de 2022

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante el tercer tema de la parte de Análisis. Ante la gran cantidad de resultados expuestos será necesario hacer una síntesis y desarrollar solo una parte de ellos.

- La *introducción* debe añadirse al completo porque concreta el tema y pone los antecedentes de lo que luego se va a desarrollar.

- De la sección *interpolación polinómica* es importante enunciar y demostrar la proposición 3.1. También debe desarrollarse el polinomio de Lagrange. De la acotación del error no es necesaria la demostración, solo enunciar la proposición 3.3, que servirá después para la subsección de los polinomios de Chebyshev. También debe desarrollarse toda la parte del determinante de Vandermonde.

- La parte del *polinomio de interpolación de Newton* debe introducirse al completo, sin embargo no es necesaria la demostración de todos los resultados relativos a las *diferencias divididas*. En este caso tan solo la proposición 3.8. Es también interesante estudiar los ejemplos, aunque luego no se desarrollen en el examen de oposición. De la subsección relativa a los puntos igualmente separados, solo es necesario dar la fórmula.

- De la subsección correspondiente a los *polinomios de Chebyshev* no son necesarias las demostraciones, pero sí los resultados, además de hacer un desarrollo completo del porqué de su definición.

- De la parte del *polinomio de interpolación de Hermite* son interesantes las fórmulas de las diferencias divididas cuando los nodos coinciden, y de su porqué. No son necesarias las demostraciones. Como antes, se recomienda estudiar el ejemplo.

- La parte de la *extrapolación* hay que introducirla al completo.

2. Introducción

Existen cuatro formas distintas de introducir una función real de variable real[1]: en forma de tabla, en forma de un texto, por medio de una expresión algebraica y por medio de una gráfica.

Esto es lo que contamos en esencia a los alumnos de Secundaria y Bachillerato. Y, dicho sea de paso, no es del todo falso. Decimos esto porque en el fondo, la única forma de definir una función definida sobre los reales es por medio de una expresión matemática. En otro caso nos sería imposible conocer la imagen de todos los puntos; y si la hay seguro que esta se puede reducir a algún tipo de fórmula, con lo que estaríamos afirmando nuestra tesis. Por tanto, en el caso de que nuestra función venga definida a partir de una tabla por ejemplo, solo tendremos las imágenes de los elementos que pertenezcan a la tabla, pero de ninguno más. Si nuestro objetivo es conocer las de otros valores tenemos la posibilidad de intentar el cálculo de forma experimental, lo que en el caso de que fueran muchos puntos probablemente resultaría muy costoso, o intentar resolver este problema aproximando por medio de polinomios, y calculando las imágenes de estos puntos como las imágenes en estos polinomios.

Esto es lo que ocurre en la realidad del mundo en que vivimos. Cuando se toma la temperatura de un objeto a lo largo del tiempo, vemos que si no se le ha sometido a un aumento de esta, lo normal es que vaya descendiendo. Es cierto que existe una ley física (expresión algebraica) que nos indica cómo sigue la pérdida de temperatura, pero también es cierto que a temperaturas muy cercanas a la límite, la fórmula no se ajusta exactamente a la realidad. Cuando anotamos todos los datos obtenidos experimentalmente estamos introduciendo una función por medio de una tabla.

Si queremos estudiar el período de desintegración de una partícula radiactiva a lo largo del tiempo, sabemos que sigue una ley exponencial (otra expresión algebraica), pero también sabemos que en algunos casos por variación en las condiciones iniciales, los períodos no se ajustan exactamente a la exponencial, con lo que los datos obtenidos a partir de la fórmula no son del todo correctos. También aquí, al anotar los resultados obtenidos por medio de la experimentación estamos introduciendo una función por medio de una tabla.

Estos y otros problemas son los que aparecen cuando se estudian las funciones que vemos en la Naturaleza. Salvo casos excepcionales siempre hay pequeñas modificaciones o cambios en las condiciones previas que transforman los resultados finales.

Pero no solo tenemos estos ejemplos en los que, previamente, puede haber una *fórmula* que rija el experimento en cuestión; en muchas ocasiones nos encontramos con la no existencia de tal expresión algebraica. Es en este momento cuando surge la necesidad de *aproximar* la tabla de valores que tengamos por medio de una función. Y es a partir de aquí cuando podemos intentar *interpolar* y *extrapolar* datos o *valorar* lo que ocurre fuera de las evidencias dadas, fuera de la información recibida en forma de tabla.

Nuestro objetivo es calcular un polinomio (que llamaremos *polinomio interpolador*), a partir de unos datos previos. De las dos formas de introducir dichos datos: la tabla y la

[1] Estamos hablando de funciones definidas en los reales y sobre los reales.

expresión algebraica, con la primera se adolece de conocer a posteriori el error cometido al considerar el polinomio interpolador como aproximación de la función. Esto es claro porque desconocemos el valor fuera de los datos originales.

La segunda forma sí lo permite. Siempre que la función a aproximar tenga unas características previas, podremos acotar el error que se comete al *acercarnos* a dicha función.

Como la forma de introducir los datos no interfiere en el cálculo del polinomio, nosotros lo haremos a partir de una función previa, definida en un cierto intervalo cerrado $[a, b]$, y que al menos sea continua:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nos planteamos una serie de cuestiones. La primera es si para un polinomio de un grado concreto podemos acotar el error que cometemos al considerarlo una aproximación; también si dicho polinomio es óptimo y si es único; y por último si somos capaces de dar con una expresión algebraica explícita del mismo.

La idea es sencilla. Partimos del espacio de las funciones continuas en $[a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}$, y consideramos como subespacio suyo al de los polinomios de grado n (de dimensión $n + 1$). Así, dada cualquier $f \in \mathcal{C}[a, b]$ buscamos cierto $P_n(x) \in \mathcal{P}_n[a, b]$ como mejor aproximación de f. Curiosamente, el *teorema de aproximación de Weierstrass*[2] nos resuelve parcialmente el problema:

Teorema 2.1 (Teorema de aproximación de Weierstrass) *Dada una función $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y dado $\epsilon > 0$, entonces existe un polinomio $p(x)$ tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ para cualquier $x \in [a, b]$.*

Básicamente este resultado nos dice que el espacio de los polinomios en un intervalo cerrado $[a, b]$ es un subconjunto denso en $\mathcal{C}[a, b]$ con la norma del supremo.

El lector puede pensar que para hablar de densidad necesitamos dotar de una topología a los espacios $\mathcal{P}[a, b] \subset \mathcal{C}[a, b]$, y lleva razón. En este caso esta vendrá dada por una distancia, y esta por una norma o en su defecto por una seminorma[3].

Antes de nada recordemos el concepto de producto escalar[4] en un espacio vectorial.

Definición 2.2 *Dado $(V, \mathbb{K})$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se define un producto escalar sobre $\mathcal{V}$, a una aplicación del tipo:*

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u, v) & \mapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

que cumple:

a) $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ $(\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0)$

b) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

c) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

[2]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) matemático alemán considerado como el padre del análisis moderno.

[3]Las seminormas definen una seudodistancia.

[4]También se le llama *producto interno*.

d) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *(hermítica).*

Recordemos también la definición de norma:

Definición 2.3 *Una norma en un espacio vectorial* $(V, \mathbb{K})$ *siendo* $K = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*, es una aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot|| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & ||v|| \end{array}$$

que verifica:

a) $||v|| \geqslant 0$ $(||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0)$

b) $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$

c) $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$-

Si no se exige explícitamente que $||v|| = 0$ implique $v = 0$, estamos en el caso de una seminorma. Y mientras que las normas definen distancias, las seminormas seudodistancias.

Dentro de $\mathcal{C}[a, b]$ podemos definir una multitud de normas o seminormas distintas. Por ejemplo, para $f \in \mathcal{C}([a, b])$, son normas:

$$||f|| = \text{máx}\,\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$||f|| = \int_a^b |f(x)| dx$$

Aunque no es necesario incluirlo en el tema, recordemos también que los productos escalares pueden definir normas asociadas a ellos.

En efecto, si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto escalar definido en un cierto espacio $(V, \mathbb{K})$ entonces

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot|| & : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & ||v|| = (\langle v, v\rangle)^{1/2} \end{array}$$

es una norma.

Para $(V, \mathbb{K}) = (\mathcal{C}[a, b], \mathbb{R})$ y para cada $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ podemos tener

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

que resulta ser un producto escalar en $\mathcal{C}[a, b]$. Así, su norma asociada se denota $||\cdot||_2$:

$$||f||_2 = \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)^{1/2}$$

Supongamos por tanto que tenemos definida una distancia en $\mathcal{C}[a, b]$, entonces dada una cierta f buscamos un elemento de $\mathcal{P}_n[a, b]$ que haga que dicha distancia sea mínima. En el caso por ejemplo de que dicha distancia provenga de un producto escalar, se puede demostrar que el polinomio que cumple estos requisitos no es otro que su proyección ortogonal.

Concretemos esta idea. Dado $(\mathcal{C}[a,b], \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert[5], consideramos a $\mathcal{P}_n[a,b]$ como subespacio suyo. La proyección ortogonal de f sobre $\mathcal{P}_n[a,b]$ nos proporciona el elemento de este subespacio cuya distancia a f es mínima[6]. Sus coordenadas vienen dadas por la expresión:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle f, e_i \rangle e_i(x)$$

siendo $e_i(x) = x^i$ una base ortonormal de $\mathcal{P}_n[a,b]$.

Pero el objetivo de la interpolación polinómica no es *aproximar* funciones utilizando normas, sino seminormas.

Dados $x_i \in [a,b]$ $i = 0, 1, \cdots, n$, consideremos:

$$\begin{array}{rccl} ||\cdot|| : & \mathcal{C}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & ||f|| = \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)| \end{array}$$

Es fácil comprobar que es una seminorma porque cumple todas las propiedades de la norma salvo la primera. Ello es debido a que dos funciones f y g pueden ser distintas $f \neq g$ y sin embargo $||f|| = ||g||$ (basta que coincidan en los x_i).

Esta seminorma define una pseudodistancia en $\mathcal{C}[a,b]$. Dada una cierta f buscamos, en las mismas condiciones anteriores, un polinomio de grado n cuya *distancia* a f sea mínima. Si este polinomio es tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$ entonces será el que buscamos puesto que:

$$||f - P_n|| = \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - P_n(x_i)| = 0$$

A $P_n(x)$ se le denomina *polinomio de interpolación* de f en los nodos $x_i \in [a,b]$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

3. Interpolación polinómica

En todo lo que resta de tema consideraremos que para cada x_i se tiene $f(x_i) = y_i$. Además, a cada uno de estos puntos x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$ se les denomina nodos (también, abusando de la nomenclatura diremos que las parejas (x_i, y_i), $i =, 1, \cdots, n$ son nodos).

Así pues, supongamos conocidos los valores (x_i, y_i), $i = 0, \cdots, n$, por los que pasa una función. Buscamos un polinomio de grado n, $P_n(x)$, que pase exactamente por dichos puntos, es decir:

$$P_n(x_i) = y_i, \text{ para cada } i = 0, \cdots, n$$

Queremos contestar afirmativamente a las preguntas formuladas antes: que el polinomio es óptimo, que es único, y que podemos dar una expresión algebraica de él.

Que es único lo demuestra la siguiente proposición.

[5]David Hilbert (1862-1943) fue un matemático alemán de finales del XIX y principios del XX. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial al que se le ha asociado un producto escalar.

[6]Tenga el lector en cuenta que un espacio de Hilbert no es más que la generalización de un espacio euclídeo.