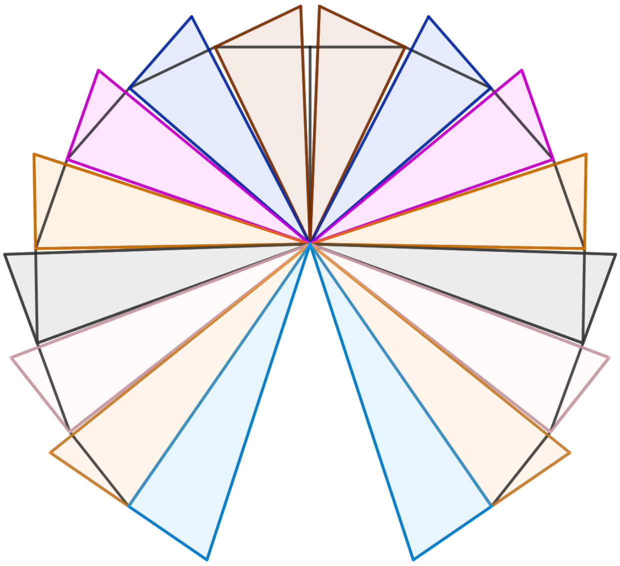
JORGE MORRA

Tema 25. Límites de funciones. Continuidad y discontinuidades. Teorema de Bolzano. Ramas infinitas.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 25. Límites de funciones. Continuidad y discontinuidades. Teorema de Bolzano. Ramas infinitas.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigesimoquinto cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de límites de funciones, continuidad, teorema de Bolzano y ramas infinitas.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigesimoquinto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran, o bien conocer algo más de esta ciencia, o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, agosto de 2023

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante del tema de límites y de las funciones continuas. Ante la gran cantidad de resultados expuestos será necesario hacer una síntesis y desarrollar solo una parte de ellos.

- La *introducción* debe añadirse al completo. Téngase en cuenta que el desarrollo del tema lo hemos encaminado al estudio de los límites y las funciones continuas en espacios métricos, no restringiéndonos a $\mathbb{R}$ exclusivamente; aunque sabemos que el conjunto de los reales, con la norma del valor absoluto, es un espacio métrico y la topología asociada es la usual, la de intervalos abiertos y cerrados. La introducción nos acerca al concepto de espacio métrico, norma y topología asociada a un espacio donde tenemos definida una distancia[1]. Las definiciones y los conceptos que se han introducido aquí son básicos para el posterior desarrollo del tema.

- De la sección *límite de una función en un punto* deben desarrollarse los conceptos y las definiciones, y demostrarse al menos uno de los dos teoremas.

- De la sección *funciones continuas* debe añadirse la definición de función continua en un espacio métrico, así como las operaciones; teniendo en cuenta que existen limitaciones en cuanto a las operaciones que podemos efectuar con dos funciones. Los teoremas tienen que enunciarse, pero no es necesaria su demostración salvo el que afirma que la composición de funciones continuas es una función continua, que debe enunciarse y demostrarse.

- De la sección *Continuidad de funciones con valores vectoriales* solamente debe darse un esbozo de ella, considerar la posibilidad de funciones con valores en $\mathbb{R}^k$ y definir y enunciar los resultados más interesantes; como por ejemplo la desigualdad de Cauchy-Schwartz o que el producto escalar es una función continua.

- De la sección *Continuidad de funciones reales de variable real* tenemos que darnos

[1] Una métrica y una distancia es lo mismo. Los espacios métricos son espacios donde se ha definido una distancia.

cuenta que todos los resultados y definiciones ya se han dado, por consiguiente solo tenemos que nombrarlos. Sí es importante el desarrollo de los tres ejemplos de funciones discontinuas, así como los tipos de discontinuidades. En esta parte, si el lector lo considera oportuno, puede añadir aquellos resultados del anexo que le resulten interesantes. Mi recomendación es que se limite a la definición y al teorema correspondiente, sin demostración. Aquí, resulta importante que el tribunal piense que sabe mucho más del tema, pero que no le da tiempo a desarrollarlo.

- La sección *teorema de Bolzano* debe añadirse al completo. El teorema debe enunciarse y demostrarse.
- La sección *ramas infinitas* también debe desarrollarse al completo, junto con los ejemplos que aparecen.
- La sección *conclusiones* se deja para el lector pues no deja de ser una relación de conceptos y resultados que se han desarrollado en el tema.
- De la última parte, la del *anexo*, se deja para el lector escoger aquellos resultados que le resulten importantes e introducirlos en la sección de *continuidad de funciones reales de variable real*[2]. El objetivo de esta sección es que el lector complete algunas de las ideas que se han enunciado y que están relacionadas con las funciones continuas de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

2. Introducción

Nosotros no nos vamos a centrar en límites de funciones reales de variable real, sino que vamos a generalizarlas. En una primera parte del tema, nuestras funciones estarán definidas sobre espacios métricos, sabiendo que, en este caso, no podremos desarrollar todo con excesiva profundidad.

Tenemos que entender tres o cuatro conceptos básicos necesarios para comprender lo que ocurre con las funciones reales de variable real.

En primer lugar el concepto de límite de una función y por extensión el de continuidad están asociados al concepto de topología[3]. Es necesario saber cuándo dos puntos están *cerca* uno del otro y también es necesario decir cuándo un límite se *aleja* al infinito. La topología nos informa de la *cercanía* de dos puntos, así que con ella estaremos en condiciones de hablar de límites en un punto y de continuidad.

En segundo lugar, además de las funciones definidas sobre espacios métricos, también estudiaremos aquellas definidas en $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$, y este espacio es un espacio muy particular. La topología en $\mathbb{R}$, la que utilizamos de forma habitual en Análisis, es la de los intervalos abiertos, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; y esta proviene de la distancia asociada al valor absoluto, $d(x, y) = |x - y|$. Se conoce como la topología usual en $\mathbb{R}$.

Y en tercer lugar, y aunando las dos ideas anteriores; una métrica en un espacio induce una topología asociada que se denomina topología métrica. Así pues, las topologías que

[2] Es una sugerencia, el lector puede introducir estos conceptos y resultados donde lo crea conveniente.
[3] La idea de topología no es más que la definición de lo que serán los abiertos del conjunto.

necesitamos en dos espacios X_1 y X_2 para estudiar los límites y la continuidad de funciones entre dichos espacios provendrán de métricas definidas sobre ellos.

Comencemos por el principio, definiendo el concepto de métrica o distancia.

Definición 2.1 *Dado un conjunto X, diremos que la aplicación*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

es una distancia si verifica:

a) Para cualquier $x, y \in X$ se tiene que $d(x, y) \geqslant 0$ ($d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$). Es decir, la distancia entre dos puntos distintos es siempre positiva; y si es cero es que son el mismo punto.

b) Para cualquier $x, y \in X$ se tiene $d(x, y) = d(y, x)$; o dicho de otra forma, la distancia es una aplicación simétrica.

c) Para cada $x, y, z \in X$ se tiene $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$; conocida como la "desigualdad triangular"

Al espacio (X, d) se le llama espacio métrico.

Como ejemplo, la aplicación valor absoluto $f(x) = |x|$ define una métrica en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = |x - y| \end{array}$$

Puede el lector comprobar que se cumplen las condiciones para ser una distancia[4].

El siguiente paso es preguntarse: ¿para qué necesitamos una métrica? La respuesta natural es: para medir distancias entre puntos; pero en realidad, ¿por qué necesitamos medir distancias entre puntos?, pues porque necesitamos saber cuánto de *"cerca"* se encuentran dos puntos en un espacio.

Insistimos en que tiene que tener en cuenta el lector que si queremos hablar de límites de funciones o de sucesiones, y queremos hablar de convergencia, es imprescindible saber la *"cercanía"* existente entre puntos o la *"lejanía"* de estos. Y es aquí cuando entra la topología.

Definición 2.2 *Dado un conjunto X diremos que una familia $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X es una topología si se cumple:*

a) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$. Es decir, el conjunto vacío y el total son elementos de la topología.

b) La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$, esto es, si $\{G_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{G}$, entonces

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$$

[4] Como ejercicio se deja la demostración de: $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

c) La intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ *es también un elemento de* $\mathcal{T}$*, es decir, si* $\{G_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{G}$*,* J *finito, entonces:*

$$\bigcap_{j\in J} G_j \in \mathcal{T}$$

A cada elemento de la topología se le llama *"abierto"*, por lo que las propiedades anteriores se pueden traducir en: el vacío y el total son abiertos, la unión arbitraria de abiertos es también un abierto y la intersección finita de abiertos es abierta.

Por definición, y lo incluiremos también, al complementario de un abierto se le llama cerrado.

Definición 2.3 *Diremos que un conjunto* $C \subset (X, d)$ *es un cerrado si su complementario*[5] *es un elemento de la topología, es decir,* $= X - C = X\backslash C = \overline{C} \in \mathcal{T}$

Continuemos ahora con la introducción de los abiertos a partir de una métrica, es decir, con la definición de topología asociada a una métrica. Comenzamos con la definición de bola.

Definición 2.4 *Dado un espacio métrico,* (X, d)*, llamaremos bola abierta de centro* $x_o \in X$ *y radio* $r > 0$*, al subconjunto de* X*:*

$$\mathcal{B}(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_o) < r\}$$

Definición 2.5 *Dado un espacio métrico,* (X, d)*, diremos que un subconjunto* G *es abierto, es decir,* $G \in \mathcal{T}_d$ *si para cada elemento* $x_o \in G$ *existe un cierto* r_o *tal que* $\mathcal{B}(x_o, r_o) \subset G$*.*

Lo interesante es que el conjunto de *abiertos* definidos a partir de 2.5 tiene la estructura de una topología; es decir, el vacío y el total son abiertos, la unión arbitraria de abiertos es abierta y la intersección finita también es abierta.

Teorema 2.6 *Si* (X, d) *es un espacio métrico, entonces*

$$\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, \exists r > 0 \ \textit{tal que} \ B(x, r) \subset G\}$$

es una topología en X*.*

Demostración: Se deja para el lector. Es sumamente sencilla.

$\otimes$

De esta forma, un espacio métrico es a su vez un espacio topológico, con una topología asociada, que denotaremos $(X, \mathcal{T}_d)$, o sencillamente (X, d), si damos por hecho que la topología es la que viene dada por d.

Una vez que tenemos algunas de las características básicas de los espacios métricos, uno de los pasos naturales que siguen a continuación es estudiar las funciones que *"conservan"*

[5] La forma de denotar la diferencia de conjuntos es con una barra inclinada $\backslash$, por lo que sería más correcto escribir $X\backslash C$ que $X - C$, sin embargo en ocasiones el lector lo verá escrito con el signo $-$. Esperamos que no dé lugar a confusión puesto que en este caso estaríamos hablando de diferencia de conjuntos y no de la diferencia de los elementos de un conjunto.

las métricas, o en este caso que *"conservan"* las topologías. Estas funciones son conocidas como funciones continuas.

De todas formas, no adelantemos acontecimientos. Necesitamos la introducción de otro concepto topológico, el de punto de acumulación[6]. Así pues:

Definición 2.7 *Dado (X, d) un espacio métrico y dado $x_o \in X$, diremos que x_o es un punto de acumulación de X si para todo $\epsilon > 0$ se cumple $(\mathcal{B}(x_o, \epsilon) \backslash \{x_o\}) \cap X \neq \emptyset$.*

En esencia, un punto x_o es de acumulación cuando podemos encontrar puntos de X tan cerca de él como queramos. Al conjunto de puntos de acumulación de X se le denota como X'.

Es importante señalar que un punto de acumulación no tiene porqué pertenecer al conjunto, es decir, el hecho de afirmar que $x_o \in X'$ no implica necesariamente que $x_o \in X$. Un ejemplo de ello son los extremos del intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con la topología usual en los reales. Es trivial que a y b son de acumulación y no pertenecen al intervalo.

Cuando se estudian los puntos de acumulación de un conjunto con una topología, en realidad lo que se está diciendo es que es posible encontrar una sucesión de dicho conjunto que converja y lo haga precisamente a dicho punto de acumulación. Recordemos brevemente el concepto de límite de una sucesión en un espacio topológico.

Definición 2.8 *Dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{x_n\} \subset X$ una sucesión. Diremos que $\{x_n\}$ converge a $x_o \in X$ y lo denotaremos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$, si para cada abierto G de la topología que contenga al punto $x_o \in G \in \mathcal{T}$, existe un cierto n_o tal que para todo $n > n_o$ se cumple que $x_n \in G$.*

Esta definición es correcta, pero no es necesario ser tan estrictos. En realidad se puede demostrar que si se cumple para unos *abiertos* especiales, entonces se cumple para todos. Estos abiertos especiales son los que se llaman *base de la topología*[7].

No todos los espacios topológicos tienen la posibilidad de tener base[8]; no obstante, en el caso de los espacios métricos, sí; las bolas son los abiertos que forman la base de su topología. Por tanto, la definición de límite de una sucesión quedaría así:

Definición 2.9 *Dado (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\} \subset X$ una sucesión. Diremos que $\{x_n\}$ converge a $x_o \in X$ y lo denotaremos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$, si para cada $\epsilon > 0$ existe un cierto n_o tal que para todo $n > n_o$ se tiene $d(x_n, x_o) < \epsilon$.*

La siguiente proposición nos ayuda a comprender en mayor medida el concepto de punto de acumulación. Se aconseja que la prueba la haga el lector por su cuenta.

---

[6] También se puede estudiar la continuidad en puntos que no son de acumulación. Estos puntos se denominan puntos aislados. No obstante, el estudio de la continuidad en ellos acaba demasiado pronto puesto que el límite es trivial y una función siempre es continua en un punto aislado.

[7] La base de una topología es el subconjunto de abiertos que son capaces de *generar* toda la topología. Esta definición es solamente intuitiva y no vamos a dar una más concreta; puede ampliarla el lector en cualquier texto de topología general.

[8] Siendo rigurosos, esto no es del todo cierto puesto que la misma topología podría considerarse una base.