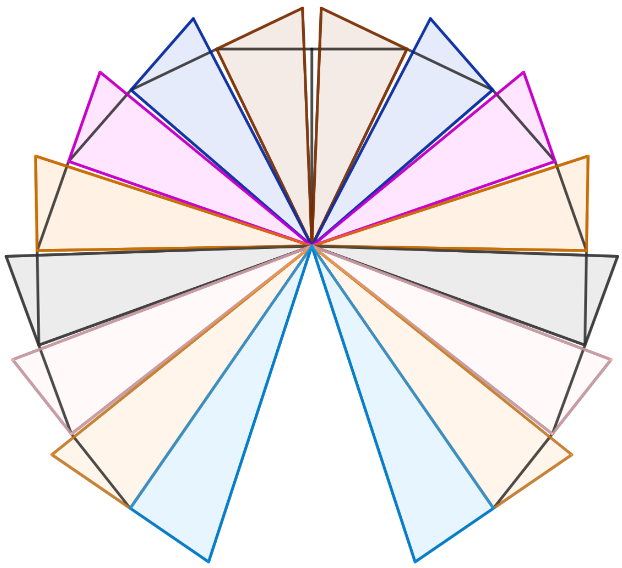
JORGE MORRA

Tema 26.
Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones.

OPOSICIONES
MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 26. Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones.



OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el vigesimosexto cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de derivada de una función en un punto, función derivada, derivadas sucesivas y aplicaciones.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cada momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este vigesimosexto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran, o bien conocer algo más de esta ciencia, o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, octubre de 2024

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Está el lector delante del tema de la derivada, probablemente uno de los conceptos de los que más se puede hablar de todas las Matemáticas. Ante la gran cantidad de resultados expuestos será necesario hacer una síntesis y desarrollar solo una parte de ellos.

- La introducción, como es habitual en todos los temas, es importante desarrollarla al completo pues nos pone en contexto con el concepto que vamos a definir después.

- La sección de la derivada de una función en un punto debe añadirse sin omitir nada ya que define el concepto de derivada y nos dice cómo son sus propiedades y su interpretación geométrica. Las operaciones con la derivada deben incluirse todas ellas, además de sus demostraciones.

- La parte de diferencial de una función en un punto debe añadirse aunque omitiendo las demostraciones que el lector considere oportunas.

- La sección ”función derivada” debe añadirse aunque alguna de las demostraciones (también las que el lector considere), pueden omitirse.

- La parte de la función de Weierstrass debe, al menos, nombrarse. Es interesante saber que existen funciones de este tipo, aunque en el desarrollo del tema se omita la demostración del teorema.

- La sección ”derivadas sucesivas” es importante y debe incluirse. Justifica el hecho de efectuar sobre una función varias derivadas y clasifica aquellas funciones que son derivables un número finito o infinito de veces. Los ejemplos también son importantes.

- En cuanto a las ”aplicaciones de la derivada”, es una sección que debe incluirse al completo.

2. Introducción

La derivada de una función es el primero de los dos conceptos fundamentales que caracterizan al Cálculo Infinitesimal; el segundo, como el lector puede suponer, es el de la integral. Como todo en Matemáticas, su avance no ha sido lineal, sino que ha tenido momentos más o menos rápidos, además de ciertas vacilaciones e incluso retrocesos.

Los comienzos del Cálculo, y por ende de la derivada datan de mediados del siglo XVIII. Los avances que han tenido lugar han partido del intento de resolución de algunos problemas importantes de la época y de momentos anteriores en la Historia, como por ejemplo del intento de trazar tangentes a curvas concretas[1]. Arquímedes llego a calcular las tangentes a su espiral y se piensa que para ello es probable que considerara el problema desde la idea de un punto que se pudiera mover en el espacio, sin embargo las tangentes que llegaron a calcular los griegos eran meramente estáticas, su procedimiento no incluía el paso al límite, ni el cálculo de valores infinitamente pequeños.

Al llegar al siglo XVII el avance en cuanto al concepto había progresado, así una tangente era una especie de paso a límite de las secantes a una curva entre dos puntos dados, cuando los puntos se acercan el uno al otro. No obstante, era tremendamente difícil concebir esa "desaparición" de la secante para transformarse en una tangente. El paso del "ser" a la "nada" traía consigo ciertos problemas metafísicos no fáciles de resolver.

En esencia, la derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia una variable (dependiente) con respecto a otra (independiente). La idea es medir este "cambio" por medio de un número, y a este número es lo que se denomina derivada. Pero como prácticamente todos los conceptos en Matemáticas, en primer lugar la derivada se utilizó para resolver problemas, después se desarrolló estudiando sus propiedades para, finalmente, definirse dentro de una teoría.

3. Derivada de una función en un punto

Consideremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos también que es continua en su intervalo de definición, y sea c un punto del intervalo abierto, $c \in (a, b)$.

La idea que tenemos es la de trazar una tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c)$. Diremos que en el caso de que podamos hacerlo, la función será derivable en $x = c$ y su derivada tomará un valor concreto, exactamente la pendiente de dicha recta tangente.

---

[1] Este concepto proviene de los griegos, aunque estos definieron una tangente como aquella recta que corta en un único punto a una curva; definición que hoy día sabemos que contiene algún pequeño problema con aquellas líneas que se cortan a sí mismas, o que cambian su curvatura.

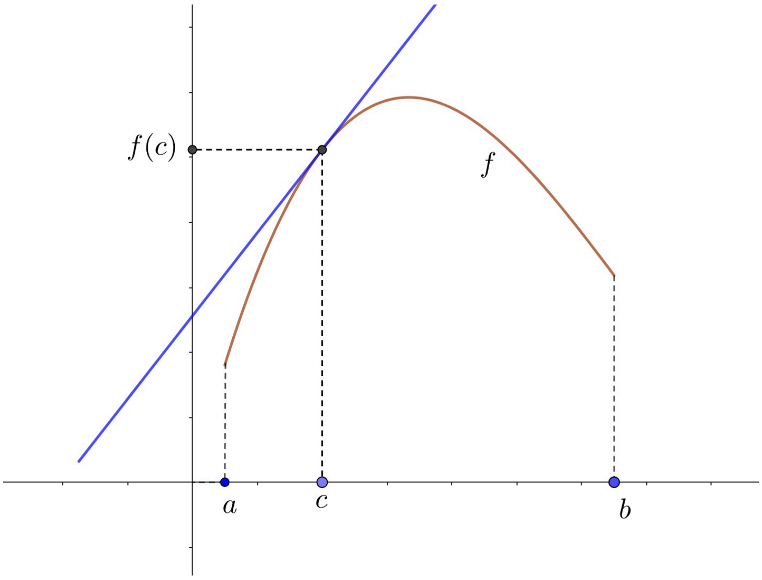


Figura 1: Recta tangente a f en el punto $(c, f(c))$.

Esta idea, sencilla en apariencia, conlleva una cierta complejidad matemática en su definición. Necesitamos hablar de límites, de "acercamientos" al punto, de términos del tipo "infinitamente pequeño", como si en términos del lenguaje pudiera haber algo infinitamente pequeño o infinitamente grande.

Tenemos dos problemas a la hora de intuir lo que queremos definir. El primero es entender geométricamente el concepto de tangente, que, si bien es cierto, es algo que nos puede parecer evidente o trivial, tenemos que contemplar el hecho de que una tangente debería ser única; por lo que si una función admitiera más de una tangente en un punto deberíamos decir que no es derivable en dicho punto. Y la segunda de las dificultades es dar una definición de derivabilidad acorde con la idea intuitiva que hemos asociado a la tangente. Pretendemos, por tanto, que la definición matemática nos resuelva el problema de la no existencia de varias "tangentes".

Por otra parte, como ya introdujimos en la sección anterior, la derivada no solo va a tener una función geométrica, sino que además nos va a indicar la forma de crecer nuestra función. La derivada nos ayudará a entender cómo se mueve la variable dependiente de una función f cuando la independiente lo hace a una cierta velocidad. Este concepto, más relacionado con la física que con la matemática, nos permitirá resolver problemas de índole físico.

Fijémonos en la figura anterior y 'àcerquémonos" al punto x_o por la izquierda y por la derecha, es decir, por valores menores que x_o y mayores que x_o. Veamos cómo varía la pendiente de la recta que podemos dibujar entre dichos valores. Consideremos para ello la siguiente figura, aunque en ella solo lo haremos por la derecha:

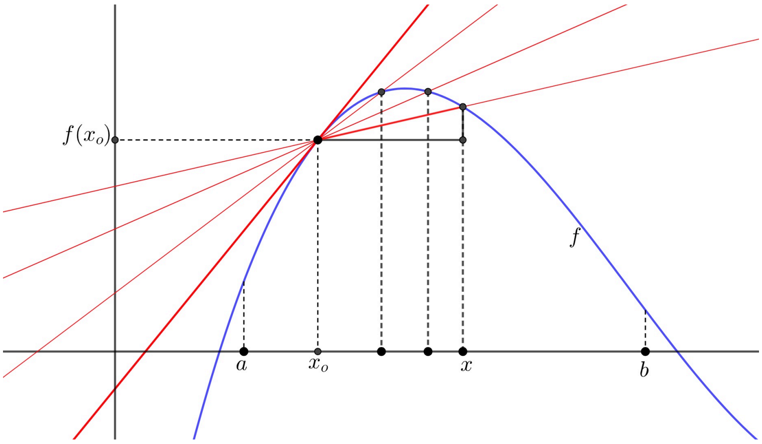


Figura 2: Recta tangente a f en el punto $(x_o, f(x_o))$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_o, f(x_o))$ y $(x, f(x))$ viene dada por el cociente:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Para cada x tendremos una cierta pendiente, m_x, (que dependerá de x, lógicamente); y la idea que vamos a introducir es la de acercarnos al punto x_o. Si las rectas que se definen, que son las que pasan por los puntos $(x_o, f(x_o))$ y $(x, f(x)$, "convergen" a la recta que intuimos como su tangente, entonces presumiblemente las pendientes convergerán también a su pendiente. En este caso diremos que la función es derivable en x_o y que su derivada es la pendiente de dicha recta tangente.

Parece natural, por tanto, calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to x_o} m_x = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Definición 3.1 *Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, y sea $x_o \in (a, b)$. Diremos que f es derivable en x_o si existe el límite:*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

A este valor lo denotaremos como $f'(x_o)$ y se llamará la derivada de f en x_o.

Por otra parte, si una función es derivable en todos los puntos de su dominio, entonces diremos solamente que f es derivable.

Continuemos con algunas observaciones interesantes:

Observación 3.2 *La existencia de dicho límite está condicionada a que existan los límites laterales, es decir:*

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Como ejemplo sencillo, considérese la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

que no es derivable en $x = 0$ puesto que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

y por otra parte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

Con lo que el límite no existe, y la función no resulta derivable en $x = 0$. Geométricamente observamos que no es posible "dibujar" una 'ùnica" tangente en el origen de coordenadas.

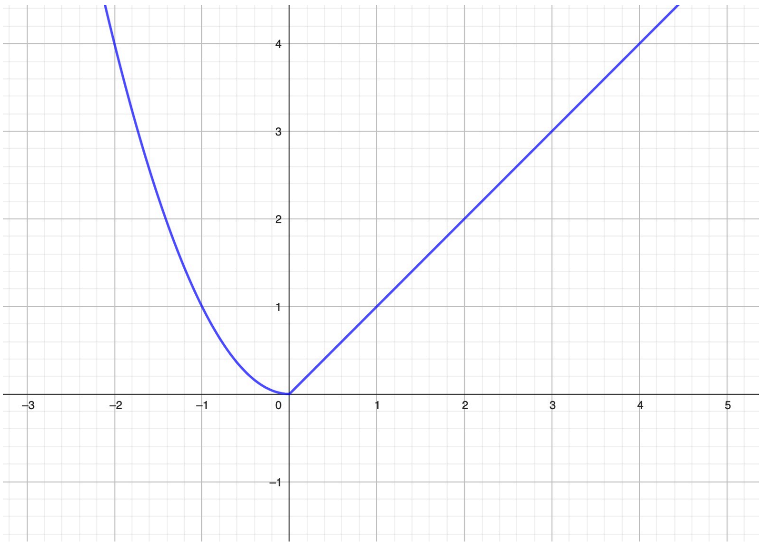


Figura 3: Función no derivable en $x = 0$

Observación 3.3 *Por otra parte se exige también que dichos límites sean finitos, no se contempla la posibilidad de que obtengamos valores como $\pm\infty$. Este hecho no es casual puesto que bien podrían considerarse rectas tangentes verticales cuyas pendientes se "acercaran" a $\pm\infty$. Por ejemplo la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (x+1)^2} & si \quad -2 < x < 0 \\ -\sqrt{1 - (x-1)^2} & si \quad 0 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

cuya representación gráfica es: